بورجي داود
أستاذ مادة الرياضيات

Bac

الهدى في الرياضيات

دروس مفصلة ، تمارين ومسائل محلولة عن:
الهندسة الفضائية

السنة الثالثة ثانوي
علوم تجريبية ، تقني رياضي
رياضيات

دار الهدى
عين مليلة - الجزائر

الجداء السلمي

I: الجداء السلمي في المستوي (مراجعة)

تمرين: ABCD مستطيل حيث:

E منتصف $[AD]$ و $AB = 1cm$ ، $AD = 2cm$

أحسب بثلاث طرق مختلفة: $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BE}$

تعريف: $\vec{u}$، $\vec{v}$ شعاعان من المستوي.

الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$، $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}.\vec{v}$ المعرف كما يلي:

- إذا كان: $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$

  فإن: $\vec{u}.\vec{v} = 0$

- إذا كان: $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$

  فإن: $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

مثال: ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث: $AB = 2cm$

لدينا: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

ومنه: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 2 \times \cos\frac{\pi}{3}$

إذن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$

خاصية: يرمز إلى العدد الحقيقي $\vec{u}.\vec{u}$ بالرمز: $\vec{u}^2$ ويسمى المربع السلمي.

بين أن: $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

العبارة التحليلية للجداء السلمي:

إذاكان: ▪ المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس.

▪ $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$

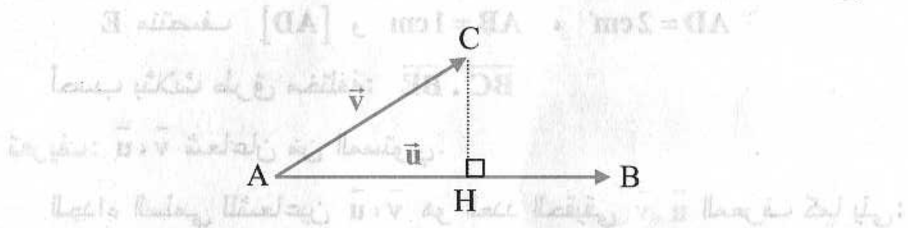
فإن: $\vec{u}.\vec{v} = ac + bd$

الجداء السلمي والمسقط العمودي لشعاع:

إذا كان: ■ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ ، $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ حيث: $A\neq B$.

■ H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB)

فإن: $\vec{u}.\vec{v}=\overline{AB}.\overline{AH}$



تطبيق: $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان من المستوي ، برهن صحة مايلي:

1) $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right]$

2) $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right]$

تطبيقات الجداء السلمي:

■ في كل ما يأتي المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;I,J)$

1) المسافة بين نقطتين:

إذا كانت: $A(x_1,y_1)$ ، $B(x_2,y_2)$ فإن:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

2) بعد نقطة عن مستقيم:

إذا كانت: $A(x_0,y_0)$ نقطة كيفية من المستوي وكان (Δ) مستقيم معرف بالمعادلة: $ax+by+c=0$ مع $(a,b)\neq(0,0)$

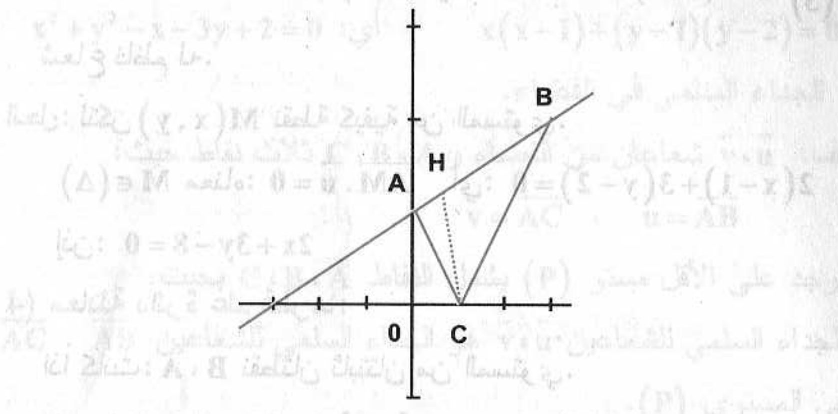
فإن: بعد النقطة A عن (Δ) يعطى بالعلاقة: $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

مثال: نعتبر في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس النقاط:

$A(0,1)$ ، $B(3,2)$ ، $C(1,0)$

أكتب معادلة للمستقيم (AB) ، ثم أحسب مساحة المثلث ABC.

الحل: كتابة معادلة للمستقيم (AB).



لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوي.

$M\in(AB)$ معناه: $\overrightarrow{AM}$ ، $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا.

لدينا: $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

ومنه: $x=3(y-1)$ أي: $x-3y+3=0$

حساب مساحة المثلث ABC:

نعلم أن: $S=\frac{AB\times CH}{2}$ حيث: [CH] الارتفاع المتعلق بالضلع [AB].

لدينا: $AB=\sqrt{(3)^2+(1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

لدينا أيضا: CH هو بعد النقطة C عن المستقيم (AB)

ومنه: $CH=\frac{|1-3(0)+3|}{\sqrt{(1)^2+(-3)^2}}=\frac{4}{\sqrt{10}}$

إذن: $S=\frac{\sqrt{10}\times\frac{4}{\sqrt{10}}}{2}=2$

3) معادلة مستقيم علم شعاع ناظم له ونقطة منه:

إذا كان: $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ شعاع غير معدوم ناظم لمستقيم (Δ).

فإن: معادلة المستقيم (Δ) تكتب من الشكل: $ax+by+c=0$

مثال: أكتب معادلة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(1,2)$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ شعاع ناظم له.

الحل: لتكن $M(x,y)$ نقطة كيفية من المستوي.

$M\in(\Delta)$ معناه: $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$ أي: $2(x-1)+3(y-2)=0$

إذن: $2x+3y-8=0$

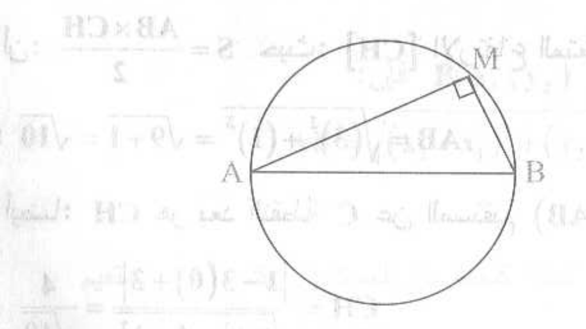
4) معادلة دائرة علم قطرها:

اذا كانت: A ، B نقطتان ثابتتان من المستوي.

فإن: الدائرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

مثال: أكتب معادلة للدائرة (C) التي قطرها $[AB]$ حيث:

$A(1,2)$ ، $B(0,1)$



الحل: لتكن $M(x,y)$ نقطة كيفية من المستوي.

$M\in(C)$ معناه: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

لدينا: $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}$

إذن: معادلة الدائرة (C) هي:

$x(x-1)+(y-1)(y-2)=0$ أي: $x^2+y^2-x-3y+2=0$

II: الجداء السلمي في الفضاء.

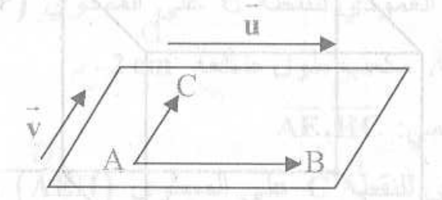
تعريف: $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء و A ، B ، C ثلاث نقاط حيث:

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ ، $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

يوجد على الأقل مستو (P) يشمل النقاط A ، B ، C بحيث:

الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ هو الجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ في المستوي (P).

أي: $\vec{u}.\vec{v}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$



خواص: كل خواص الجداء السلمي في المستوي تطبق على الأشعة من نفس المستوي في الفضاء.

نتائج: $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء ينتميان إلى نفس المستوي و α عدد حقيقي

1) $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

2) $(\alpha\vec{u}).\vec{v}=\vec{u}.(\alpha\vec{v})=\alpha\times(\vec{u}.\vec{v})$

3) $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right]$

العبارة التحليلية للجداء السلمي:

إذا كان: $\vec{u}(a,b,c)$ ، $\vec{v}(a',b',c')$ شعاعان من فضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;I,J,k)$

فإن: $\vec{u}.\vec{v}=aa'+bb'+cc'$

نتيجة: إذا كانت $A(x_1,y_1,z_1)$ ، $B(x_2,y_2,z_2)$ نقطتان من فضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس فإن:

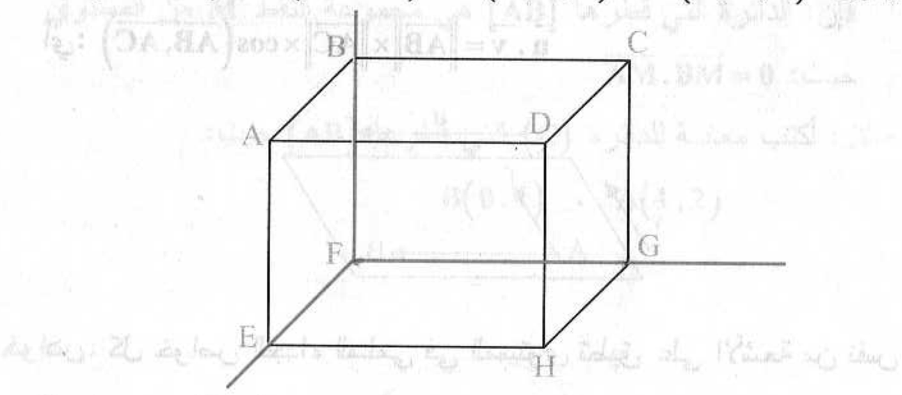
$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

مثال: ABCDEFGH مكعب طول حرفه 1.

بين أن المستقيمين (AG)،(FC) متعامدان.

الحل: نزود الفضاء بمعلم متعامد ومتجانس $(F;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$

فيكون: $A(1,0,1)$ ، $C(0,1,1)$ ، $G(0,1,0)$ ، $F(0,0,0)$



لدينا: $\vec{AG}(-1,1,-1)$ ، $\vec{FC}(0,1,1)$

ومنه: $\vec{AG}.\vec{FC}=(-1)(0)+(1)(1)+(-1)(1)=0$

وهذا يعني أن الشعاعين $\vec{AG}$ ، $\vec{FC}$ متعامدان.

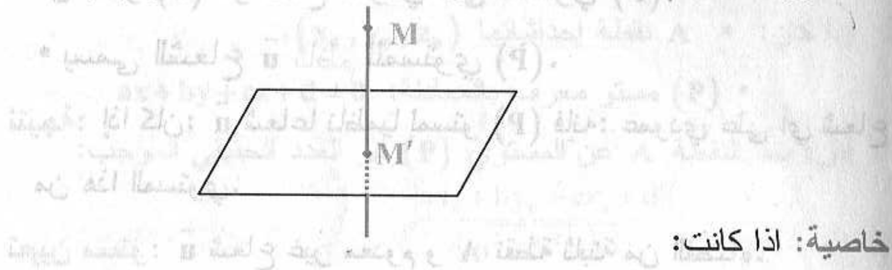
إذن المستقيمان (AG) ، (FC) متعامدان.

التعامد: الإسقاط العمودي على مستو:

تعريف: (P) مستو و M نقطة من الفضاء.

المستقيم العمودي على المستوي (P) ويشمل النقطة M يقطع المستوي (P) في نقطة وحيدة M'.

تسمى النقطة M' المسقط العمودي للنقطة M على المستوي (P).



خاصية: اذا كانت:

- A ، B نقطتان مختلفتان من مستو (P).
- C نقطة من الفضاء لا تنتمي الى المستوي (P).

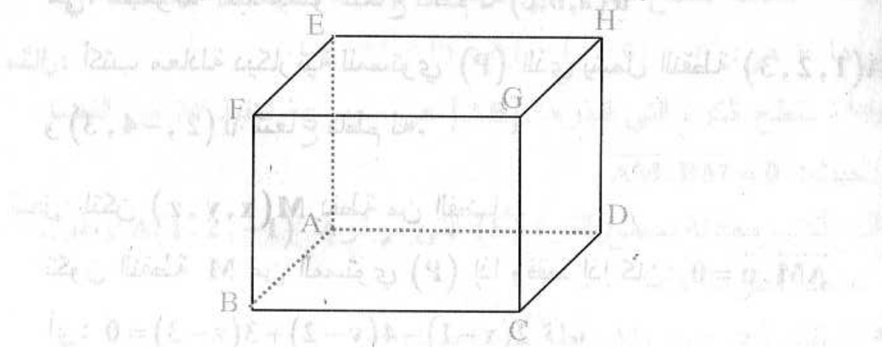
فإن: $\vec{AB}.\vec{AC}=\vec{AB}.\vec{AH}$

حيث: H المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P).

مثال: ABCDEFGH مكعب طول ضلعه 2 cm.

احسب الجداء السلمي: $\vec{AE}.\vec{HC}$

الحل: المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (AEH) هي النقطة D.



ومنه: $\vec{AE}.\vec{HC}=\vec{AE}.\vec{HD}$

بما أن: $\vec{HD}=\vec{EA}=-\vec{AE}$ فإن: $\vec{AE}.\vec{HC}=-\vec{AE}.\vec{AE}$

أي: $\vec{AE}.\vec{HC}=-\|\vec{AE}\|^2=-4$

تطبيقات الجداء السلمي:

في كل ما يأتي نزود الفضاء بمعلم متعامد ومتجانس.

1) المعادلة الديكارتية لمستو:

تعريف: كل شعاع غير معدوم $\vec{u}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا من مستو (P) هو شعاع عمودي على المستوي (P).

▪ يسمى الشعاع $\vec{u}$ ناظم للمستوي (P).

نتيجة: إذا كان: $\vec{u}$ شعاعا ناظميا لمستو (P) فإنه: عمودي على أي شعاع من هذا المستوي.

تعيين مستو: $\vec{u}$ شعاع غير معدوم و A نقطة ثابتة من الفضاء.

مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$ هي مجموعة نقط المستوي الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}$ شعاع ناظم له.

خاصية (1): لكل مستو شعاع ناظم له $\vec{u}(a,b,c)$ معادلة ديكارتية من الشكل: $ax+by+cz+d=0$ حيث d عدد حقيقي.

خاصية (2): مجموعة النقط M التي إحداثياتها (x,y,z) تحقق المعادلة: $ax+by+cz+d=0$ حيث a ، b ، c أعداد حقيقية ليست كلها معدومة هي: مجموعة نقط مستو شعاع ناظم له $\vec{u}(a,b,c)$

مثال: أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(1,2,3)$ و $\vec{u}(2,-4,3)$ شعاع ناظم له.

الحل: لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

تكون النقطة M من المستوي (P) إذا وفقط إذا كان: $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

أي: $2(x-1)-4(y-2)+3(z-3)=0$

إذن: $2x-4y+3z-3=0$

حالات خاصة: $(O;I,J,k)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

1) معادلة ديكارتية للمستوي $(O;I,J)$ هي: $z=0$

2) معادلة ديكارتية للمستوي $(O;I,k)$ هي: $y=0$

3) معادلة ديكارتية للمستوي $(O;J,K)$ هي: $x=0$

2) بعد نقطة عن مستو:

إذا كان: ▪ A نقطة إحداثياتها (x_0,y_0,z_0).

▪ (P) مستو معرف بالمعادلة: $ax+by+cz+d=0$

فإن: بعد النقطة A عن المستوي (P) هو العدد الحقيقي الموجب:

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

مثال: نعتبر المستوي (P) المعرف بالمعادلة: $x+y-z+1=0$.

بعد النقطة $A(2,3,0)$ عن المستوي (P) هو:

$$\frac{|2+3-0+1|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

3) معادلة سطح كرة:

تعريف: سطح الكرة التي مركزها A وطول نصف قطرها r هي:

مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $AM=r$.

مبرهنة: معادلة سطح الكرة التي مركزها $A(a,b,c)$ وطول نصف قطرها r هي: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$.

نتيجة: سطح الكرة التي قطرها $[AB]$ هي مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

مثال: أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها $A(1,2,-1)$ وطول نصف قطرها 3.

الحل: لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

تكون النقطة M من سطح الكرة (S) إذا وفقط إذا كان: $AM=3$

أي: $AM^2=9$ معناه: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$

مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث:

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

لدراسة هذه المجموعة نحسب: $\Delta=a^2+b^2+c^2-4d$

ونميز الحالات التالية:

- $\Delta<0$: المجموعة خالية.
- $\Delta=0$: المجموعة تشمل نقطة واحدة إحداثياتها $\left(\frac{a}{-2},\frac{b}{-2},\frac{c}{-2}\right)$
- $\Delta>0$: المجموعة سطح كرة احداثيات مركزها $\left(\frac{a}{-2},\frac{b}{-2},\frac{c}{-2}\right)$ وطول نصف قطرها $\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$.

مثال: حدد المجموعة (S) للنقط M من الفضاء التي إحداثياتها (x,y,z) تحقق المعادلة: $x^2+y^2+z^2-2x-3=0$

الحل: لدينا: $a=-2$ ، $b=0$ ، $c=0$ ، $d=-3$

ومنه: $\Delta=(-2)^2+(0)^2+(0)^2-4(-3)=16>0$

بما أن: $\Delta>0$ فإن: المجموعة (S) سطح كرة مركزها $A(1,0,0)$

وطول نصف قطرها $\frac{\sqrt{\Delta}}{2}=\frac{\sqrt{16}}{2}=2$.

المرجح

المرجح في المستوي (مراجعة).

تمرين: A ، B ، C ثلاث نقاط من مستو.

1) أنشئ النقطة G مرجح الجملة: $\{(A,1),(B,3),(C,1)\}$
2) نزود المستوي بالمعلم $(O;I,J)$ ونفرض: $A(2,0)$ ، $B(0,1)$ ، $C(3,2)$ حدد احدثيي النقطة G ثم علمها.
3) عين المجموعة (C) للنقط M من المستوي بحيث: $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$.

المرجح في الفضاء:

مبرهنة وتعريف: $\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),......,(A_n,\alpha_n)\}$ جملة تشمل n نقطة من الفضاء حيث: $\alpha_1+\alpha_2+......+\alpha_n\neq 0$.

- توجد نقطة وحيدة G من الفضاء تحقق: $\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+......+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$
- تسمى النقطة G مرجح الجملة: $\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),......,(A_n,\alpha_n)\}$

خاصية: عندما تتساوى المعاملات غير المعدومة α_n تسمى النقطة G مركز ثقل الجملة.

مبرهنة: من أجل كل نقطة M من الفضاء

$$\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+......+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}=(\alpha_1+\alpha_1+......+\alpha_n)\overrightarrow{MG}$$

حيث: G مرجح الجملة: $\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),......,(A_n,\alpha_n)\}$

مثال: عين المجموعة (E) للنقط M من الفضاء بحيث:

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=1$$

الحل: لتكن G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,-1),(C,1)\}$

ومنه: $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ أي: $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}$

لدينا: $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=1$ ومنه: $MG=1$

إذن: (E) هي مجموعة نقط سطح كرة مركزها G ونصف قطرها 1.

التمييز بالمرجح: A ، B ، C ثلاث نقاط من الفضاء ليست في استقامية.

1) المستقيم (AB) هو مجموعة مراجح للنقطتين A ، B.

2) القطعة المستقيمة $[AB]$ هي مجموعة مراجح للنقطتين A ، B مرفقة بمعاملين من نفس الإشارة.

3) المستوي (ABC) هو مجموعة مراجح للنقاط A ، B ، C.

برهان الخاصية (1):

▪ نفرض M نقطة من المستقيم (AB)

ونبرهن M مرجح للنقطتين A ، B.

بما أن: M نقطة من المستقيم (AB)

فإن: $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AM}$ مرتبطان خطيا

معناه: يوجد عدد حقيقي α بحيث: $\overrightarrow{AM}=\alpha\,\overrightarrow{AB}$

أي: $\overrightarrow{AM}=\alpha\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)$ إذن: $(1-\alpha)\overrightarrow{AM}+\alpha\,\overrightarrow{BM}=\vec{0}$

لدينا: $(1-\alpha)+\alpha=1\neq 0$

ومنه: M مرجح $\{(A,1-\alpha),(B,\alpha)\}$

▪ نفرض M مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$

ونبرهن M نقطة من المستقيم (AB).

بما أن: M مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$

فإن: $\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

معناه: $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

إذن: النقطة M تنتمي إلى المستقيم (AB).

مجموعات النقط M من الفضاء حيث:

1: $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=\alpha$ حيث: $\vec{u}$ شعاع غير معدوم

مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=\alpha$ هي مجموعة نقط مستو شعاع ناظم له $\vec{u}$.

2: $\alpha AM^2+\beta BM^2=\lambda$ حيث: α ، β ، λ أعداد حقيقية.

لتعيين مجموعة النقط M نميز الحالتين التاليتين:

أ) إذا كان: $\alpha+\beta=0$.

المعادلة: $\alpha AM^2+\beta BM^2=\lambda$ تكافئ:

$$\alpha\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}\right)^2+\beta\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}\right)^2=\lambda$$

بعد النشر والتبسيط نجد:

$$\alpha AO^2+\beta BO^2+2\,\overrightarrow{OM}\cdot\left(\alpha\,\overrightarrow{AO}+\beta\,\overrightarrow{BO}\right)=\lambda$$

نضع: $\alpha\,\overrightarrow{AO}+\beta\,\overrightarrow{BO}=\vec{u}$ ، $0.5\left(\lambda-\alpha AO^2-\beta BO^2\right)=k$

فتصبح المعادلة من الشكل: $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}=k$

إذن مجموعة النقط M من الفضاء هي:

إما مستو وإما الفضاء وإما المجموعة الخالية.

ب) إذا كان: $\alpha+\beta\neq 0$.

المعادلة: $\alpha AM^2+\beta BM^2=\lambda$ تكافئ:

$$\alpha\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM}\right)^2+\beta\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GM}\right)^2=\lambda$$

حيث: G مرجح الجملة: $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$.

بعد النشر والتبسيط نجد:

$$\alpha AG^2+\beta BG^2+(\alpha+\beta)GM^2=\lambda$$

نضع: $\dfrac{\lambda-\alpha AG^2-\beta BG^2}{\alpha+\beta}=k$

فتصبح المعادلة من الشكل: $GM^2=k$

إذن: مجموعة النقط M من الفضاء هي:

إما سطح كرة وإما المجموعة $\{G\}$ وإما المجموعة الخالية.

مثال: B ، A نقطتان من الفضاء حيث: $AB = 1$.

عين المجموعة (E) للنقط M من الفضاء بحيث:

$$2AM^2 - BM^2 = 3$$

الحل: بما أن: $2 + (-1) = 1 \neq 0$

فإنه: توجد نقطة G مرجح للجملة $\{(A, 2) ، (B, -1)\}$

أي: $2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

لدينا: $2AM^2 - BM^2 = 3$

ومنه: $2\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}\right)^2 - \left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GM}\right)^2 = 3$

بعد النشر والتبسيط نجد: $GM^2 = 3 - 2AG^2 + BG^2$

■ لنحسب AG و BG :

لدينا: $2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

ومنه: ($\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BA}$)

إذن: $AG = AB = 1$ ، $BG = 2AB = 2$

المعادلة: $GM^2 = 3 - 2AG^2 + BG^2$

تكافئ: $GM^2 = 5$ أي: $GM = \sqrt{5}$.

إذن: مجموعة النقط (E) سطح كرة مركزها G ونصف قطرها $\sqrt{5}$.

التمثيل الوسيطي لمستقيم:

الفضاء منسوب إلى معلم $(O; I, J, k)$ و (Δ) مستقيم من الفضاء يشمل النقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ و $\vec{u}(a, b, c)$ شعاع توجيه له.

تنتمي نقطة M من الفضاء إحداثياتها (x, y, z) إلى المستقيم (Δ) إذا وفقط إذا كان:

الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ ، $\vec{u}$ مرتبطين خطيا

معناه: يوجد عدد حقيقي t حيث: $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

وهذا يعني أن: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ مع: t عدد حقيقي.

تسمى الجملة السابقة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ).

مثال: نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم $(O; I, J, k)$ النقاط:

$$A(1, 2, 3) ، B(2, 0, 1) ، C(1, 1, 1)$$

أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

الحل: لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء.

$M \in (AB)$ تكافئ: $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ حيث: t عدد حقيقي.

وهذا يعني أن: $\begin{cases} x - 1 = t \\ y - 2 = -2t \\ z - 3 = -2t \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$

التمثيل الوسيطي لمستو: A، B، C ليست في استقامية

المستوي (ABC) هو مجموعة النقط M من الفضاء حيث:

$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC}$: مع λ ، t عددان حقيقيان.

مثال: التمثيل الوسيطي للمستوي (p) الذي يشمل النقاط :

$A(1, 0, 1)$ ، $B(2, 1, 1)$ ، $C(3, 1, 0)$ هو:

$\begin{cases} x - 1 = t + 2\lambda \\ y = t + \lambda \\ z - 1 = -\lambda \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x = 1 + t + 2\lambda \\ y = t + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

(Δ)، (Δ') مستقيمان من الفضاء موجهان بالشعاعين $\vec{u}$، $\vec{v}$ على الترتيب.

(P)، (P') مستويان و $\vec{n}$، $\vec{m}$ ناظميان لهما على الترتيب.

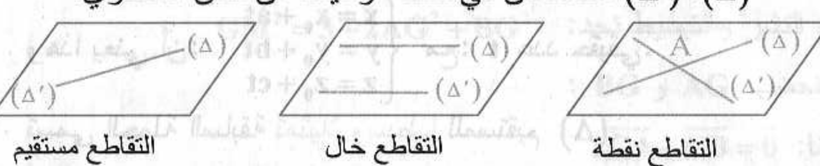
1: **لمستقيمين:** لدراسة الوضع النسبي للمستقيمين (Δ)، (Δ') نميز مايلي:

أ) $\vec{u}$، $\vec{v}$ مرتبطان خطيا:

(Δ)، (Δ') متوازيان ومختلفان أو منطبقان.

ب) $\vec{u}$، $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا:

(Δ)، (Δ') متقاطعان في نقطة أو ليسا من نفس المستوي.



التقاطع نقطة — التقاطع خال — التقاطع مستقيم

مثال: أدرس الوضع النسبي للمستقيمين (Δ_1)، (Δ_2) حيث:

$$(\Delta_1): \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = 3+2t \end{cases} \quad ، \quad (\Delta_2): \begin{cases} x = 2-t' \\ y = 3+t' \\ z = 1+2t' \end{cases}$$

الحل: شعاعا توجيه (Δ_1)، (Δ_2) هما على الترتيب $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$، $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

بما أن: $(-1)(-1) \neq (1)(2)$

فإن: $\vec{u}$، $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا.

وبالتالي: (Δ_1)، (Δ_2) متقاطعان أو لا ينتميان لنفس المستوي.

■ نحل الجملة: $\begin{cases} 1+2t = 2-t' \\ -t = 3+t' \end{cases}$ فنجد: $\begin{cases} t = 4 \\ t' = -7 \end{cases}$

من أجل $t = 4$ نجد:

$A(9,-4,11)$ نقطة من (Δ_1).

ومن أجل $t' = -7$ نجد:

$B(9,-4,-13)$ نقطة من (Δ_2).

بما أن: $A \neq B$ فإن: (Δ_1)، (Δ_2) ليسا من نفس المستوي.

2: **لمستقيم ومستو:** لدراسة الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (P) نميز الحالتين التاليتين:

أ) $\vec{u}$، $\vec{n}$ متعامدان:

(Δ) يوازي (P) أو (Δ) محتوى في (P).

ب) $\vec{u}$، $\vec{n}$ غير متعامدين:

(Δ) يقطع المستوي (P) في نقطة.

(Δ) — (Δ) — (Δ) A

التقاطع خال — التقاطع مستقيم — التقاطع نقطة

مثال: أدرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (P) حيث:

$$(P): \; 2x+y-z-1=0 \quad ؛ \quad (\Delta): \begin{cases} x = 1-2t \\ y = t \\ z = 1-3t \end{cases} \; ; \; t \in IR$$

الحل: لدينا: $\vec{u}(-2,1,-3)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و $\vec{n}(2,1,-1)$ شعاع ناظم للمستوي (P).

لدينا: $\vec{u}.\vec{v} = (2)(-2)+(1)(1)+(-1)(-3) = 0$

ومنه: $\vec{u}$، $\vec{n}$ متعامدان وعليه: (Δ) يوازي (P) أو (Δ) محتوى في (P)

بما أن: النقطة $A(1,0,1)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ) والمستوي (P)

فإن: المستقيم (Δ) محتوى في المستوى (P).

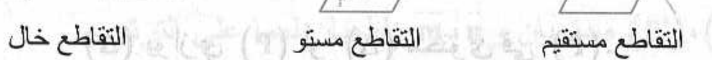
3: **لمستويين:** لدراسة الوضع النسبي للمستويين (P)، (P') نميز مايلي:

أ) $\vec{n}$، $\vec{m}$ مرتبطان خطيا:

المستويان (P)، (P') متوازيان ومختلفان أو منطبقان.

ب) $\vec{n}$، $\vec{m}$ غير مرتبطين خطيا:

المستويان (P)، (P') متقاطعان وفق مستقيم.



التقاطع مستقيم   التقاطع مستو   التقاطع خال

مثال: أدرس الوضع النسبي للمستويين (P)، (P') المعرفين بالمعادلتين:

$(P'):\ -2x+y-3z+2=0$ ، $(P):\ 2x-y+3z+1=0$

الحل: الشعاعان $\vec{n}(2,-1,3)$ ، $\vec{m}(-2,1,-3)$ ناظميان للمستويين (P)، (P') على الترتيب.

واضح أن: $\vec{m}=-\vec{n}$ ومنه: الشعاعان $\vec{n}$ ، $\vec{m}$ مرتبطان خطيا.

وبالتالي: (P)، (P') منطبقان أو متوازيان ومختلفان.

بما أن: النقطة $A(1,0,-1)$ تنتمي إلى (P) ولا تنتمي إلى (P')

فإن: المستويين (P)، (P') متوازيان ومختلفان.

خاصية: يعرف المستقيم في الفضاء بجملة معادلتين ديكارتيتين لمستويين متقاطعين.

4: لثلاث مستويات: لدراسة الوضع النسبي لثلاث مستويات ندرس الوضع النسبي لمستويين من هذه المستويات ونميز الحالات التالية.

أ) تقاطع المستويين خال: تقاطع المستويات الثلاثة خال.

ب) تقاطع المستويين مستقيم: تؤول الدراسة إلى دراسة الوضع النسبي لمستقيم ومستو

ج) تقاطع المستويين مستو: تؤول الدراسة إلى دراسة الوضع النسبي لمستويين.

مثال: حل في IR^3 الجملة:

$$\begin{cases} 4x+y+z+10=0 \\ 2x+y+z=0 \\ 2x+y+2z-1=0 \end{cases}$$

استنتج الوضع النسبي للمستويات (P_1)، (P_2)، (P_3) المعرفة بالمعادلات:

$4x+y+z+10=0$ ، $2x+y+z=0$ ، $2x+y+2z-1=0$

الحل: الجملة:

$$\begin{cases} 4x+y+z+10=0 \\ 2x+y+z=0 \\ 2x+y+2z-1=0 \end{cases}$$

تكافئ:

$$\begin{cases} 4x+y+z+10=0 & (1) \\ -2x-y-z=0 & (2) \\ 2x+y+2z-1=0 & (3) \end{cases}$$

نجمع طرفي المعادلتين (1) و (2) طرفا إلى طرف فنجد:

$2x+10=0$ ومنه: $x=-5$.

نجمع أيضا طرفي المعادلتين (2) و (3) طرفا إلى طرف فنجد:

$z-1=0$ ومنه: $z=1$.

نعوض عن قيمة كل من x ، z في المعادلة (3) فنجد: $y=9$.

إذن: الجملة تقبل حلا وحيدا هو: $(-5\ ,\ 9\ ,1)$.

بما أن: الجملة تقبل حلا وحيدا فإن:

المستويات (P_1)، (P_2)، (P_3) تتقاطع في نقطة A إحداثياتها $(-5\ ,\ 9\ ,1)$.

تمارين ومسائل محلولة

الجداء السلمي:

1: نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$ الشعاعين $\vec{u}(0,3,4)$ ، $\vec{v}(2,2,1)$

أحسب جيب تمام الزاوية $(\vec{u},\vec{v})$.

2: نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$ الأشعة: $\vec{u}(1,1,0)$ ، $\vec{v}(0,1,1)$ ، $\vec{w}(1,a,b)$

1) حدد قيسا للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$.

2) عين قيمة كل من العددين a ، b بحيث يكون الشعاع $\vec{w}$ عموديا على كل من الشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ثم احسب طويلة الشعاع $\vec{w}$.

3: نعتبر في فضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس النقاط: $A(3,0,3)$ ، $B(1,4,-3)$ ، $C(1,0,3)$ ، $D(1,0,-3)$

1) أحسب $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DC}$ ثم استنتج نوع المثلث BCD واحسب مساحته.

2) أثبت أن المستقيم (AC) عمودي على المستوي (BCD) ثم أحسب حجم رباعي الوجوه ABCD.

4: $(O;I,J,k)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

عين الأشعة $\vec{w}(a,b,c)$ العمودية على كل من الشعاعين $\vec{u}(1,2,3)$ ، $\vec{v}(2,3,1)$.

5: ABCD رباعي وجوه منتظم طول ضلعه a.

أحسب: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}$ ثم استنتج قيمة $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ وأعط تفسيرا للنتيجة.

6: ABCDE هرم قاعدته مربع ورأسه E ، أضلاعه متقايسة حيث طول كل منها 4 cm.

1) أحسب $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD}$.

2) بين أن المستقيمين (EA) ، (EC) متعامدان.

تطبيقات الجداء السلمي:

المعادلة الديكارتية لسطح كرة:

7: نعتبر في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس النقطتين: $A(1,2,0)$ ، $B(3,0,1)$.

أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي قطرها $[AB]$.

8: $(O;I,J,k)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي تشمل المبدأ O والنقاط: $A(1,0,0)$ ، $B(3,0,2)$ ، $C(1,2,2)$.

9: نعتبر في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس النقطة $A(1,-1,1)$ والمستوي (P) المعرف بالمعادلة: $x+y+z-4=0$.

أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها A وتمس المستوي (P).

10: $(O;I,J,k)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء و (S) سطح كرة معادلتها: $x^2+y^2+z^2-2x-3=0$ و (Δ) مستقيم معادلاته الوسيطية هي:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2t \\ z=2-2t \end{cases}$$

مع: t عدد حقيقي.

عين إحداثيات نقاط تقاطع المستقيم (Δ) وسطح الكرة (S).

11: الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس.

(S) سطح كرة معرفة بالمعادلة: $x^2+y^2+z^2-3x=0$ و (P) المستوي المعرف بالمعادلة: $x+y+z-1=0$

بين أن المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C) يطلب تعيين مركزها A وطول نصف قطرها r.

12: في فضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس يعطى المستوى (P) المعرف بالمعادلة: $x-2y+2z-1=0$ والنقطة A التي إحداثياتها $(3,-1,2)$.

1) أحسب نصف قطر سطح الكرة (S) التي مركزها A وتمس (P).

2) حدد إحداثيات نقطة التماس B لسطح الكرة (S) والمستوى (P).

13: الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$.

حدد في كل حالة من الحالات التالية المجموعة (S) للنقط M من الفضاء التي إحداثياتها (x,y,z) تحقق:

1) $x^2+y^2+z^2-8x=0$

2) $x^2+y^2+z^2-4x+2z+5=0$

3) $x^2+y^2+z^2-2y+2=0$

14: A ، B نقطتان من الفضاء حيث: $AB=2$ و O منتصف القطعة $[AB]$.

عين المجموعة S للنقط M من الفضاء حيث: $\overline{AM}\cdot\overline{BM}=4$.

15: نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$ النقطة $A(3,2,5)$ والمستوى (P) المعرف بالمعادلة: $4x-3z+3=0$.

بين أنه توجد كرتان تمسان المستوي (P) في النقطة A طول نصف قطر كل منهما 5، حدد مركزيهما.

المعادلة الديكارتية لمستو:

في كل ما يأتي نزود الفضاء بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$.

16: اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(1,0,1)$ وشعاع ناظم له $\vec{u}(2,1,3)$.

17: تعطى النقطتان $A(-3,2,1)$ ، $B(9,4,3)$.

أكتب معادلة المستوي (P) العمودي على القطعة $[AB]$ في منتصفها.

18: تعطى النقاط $A(1,0,2)$ ، $B(1,1,1)$ ، $C(-1,2,0)$.

عين بطريقتين مختلفتين معادلة المستوي (P) الذي يشمل A ، B ، C.

19: أكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل كل من النقطة $A(2,-3,1)$ والمستقيم (Δ) المعرف بالمعادلتين: $\begin{cases}x+2y+3=0\\3x-2z-5=0\end{cases}$

20: أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(-1,2,3)$ ويوازي المستوي المعرف بالمعادلة: $-x+2y+z-3=0$.

21: نعتبر النقطة $A(-6,2,-1)$ والمستوي (P) المعرف بالمعادلة:

$$5x-y+z+6=0$$

بين أن المسقط العمودي للنقطة A على (P) هو النقطة $B(-1,1,0)$.

22: أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(1,0,-2)$ والعمودي على كل من المستويين المعرفين بالمعادلتين التاليتين:

$$-x+y+z+3=0 \quad ، \quad 2x+y-z-2=0$$

23: تعطى النقاط: $A(2,-3,4)$ ، $B(1,0,2)$ ، $C(2,-1,2)$ ، $D(1,-1,3)$.

بين أن النقاط A ، B ، C ، D تنتمي إلى مستو واحد.

24: (Δ) ، (Δ') مستقيمان من الفضاء حيث:

$$(\Delta):\begin{cases}3x-2y-17=0\\4x-2z-10=0\end{cases} \quad ، \quad (\Delta'):\begin{cases}x+2z-4=0\\y-z-2=0\end{cases}$$

أكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المستقيم (Δ') ويوازي المستقيم (Δ).

25: حدد المجموعة (P) للنقط $M(x,y,z)$ التي إحداثياتها تحقق المعادلة: $|2x-y+z+2|=|x-y+2z|$.

26: m وسيط حقيقي و (P_m) مجموعة النقط M من الفضاء التي إحداثياتها (x,y,z) تحقق المعادلة:

$$x+(2m+1)y+(3m+2)z-1=0$$

1: بين أن المجموعة (P_m) مستو من الفضاء.

2: أثبت أن (P_m) تشمل مستقيما ثابتا يطلب تعيينه.

3: عين في كل حالة من الحالتين التاليتين المستوي الذي:

أ) يشمل النقطة $A(3,1,1)$.

ب) يعامد المستوي (P') المعرف بالمعادلة: $2x-y+z+5=0$.

بعد نقطة عن مستو:

في كل ما يأتي $(O;I,J,k)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

27: نعتبر في الفضاء المستوي (P) المعرف بالمعادلة:

$$2x-3y+z+9=0.$$

أحسب بعد النقطة $A(-1,3,2)$ عن المستوي (P) ثم فسر النتيجة.

28: 1) عين إحداثيات المركز A وطول نصف القطر R لسطح الكرة (S) المعرفة بالمعادلة: $x^2+y^2+z^2-2x+2z-7=0$.

2) أحسب بعد النقطة A عن المستوي (P) الذي معادلته:

$$x+y-2z+3=0$$

ثم استنتج الوضع النسبي لسطح الكرة (S) والمستوي (P).

29: ليكن المستويان (P_1)، (P_2) المعرفين بالمعادلتين التاليتين على الترتيب:

$$x-y+3z+1=0 \quad ، \quad -x+2y+z+5=0$$

1) بين أن المستويين (P_1)، (P_2) متعامدان.

2) أحسب بعد النقطة $A(1,2,-1)$ عن كل من المستويين (P_1)، (P_2) ثم استنتج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) تقاطع (P_1)، (P_2).

المرجح في الفضاء

30: $ABCD$ رباعي وجوه حيث: G مركز ثقل المثلث ABC و E مرجح الجملة: $\{(D,3),(A,1),(B,1),(C,1)\}$

بين أن النقطة E هي منتصف $[DG]$.

31: $ABCD$ ، $EFGH$ رباعيا وجوه لهما نفس مركز الثقل K.

برهن أن: $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DH}=\vec{0}$.

32: A، B، C ثلاث نقاط من الفضاء ليست على استقامة واحدة.

E، F، G مراجح الجمل التالية على الترتيب:

$$\{(C,1),(B,2)\} \quad ، \quad \{(A,-1),(B,2)\}$$

$$.\{(A,-1),(B,2),(C,1)\}$$

برهن أن المستقيمين (AE)، (CF) متقاطعان في النقطة G.

33: A، B نقطتان من الفضاء و G مرجح الجملة: $\{(A,2),(B,-3)\}$.

عين المجموعة (S) للنقط M من الفضاء حيث: $\|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\|=4$.

34: نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم $(O;I,J,k)$ النقاط:

$$A(4,1,-2) \quad ، \quad B(-1,3,1) \quad ، \quad C(1,0,-3).$$

1) عين إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

2) حدد إحداثيات النقطة D منتصف $[AB]$ ثم تحقق أن: $3\overrightarrow{CG}-2\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

ماذا تمثل النقطة C بالنسبة إلى النقطتين G، D ؟

35: $(O;I,J,k)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

نعتبر النقاط $A(a,0,0)$ ، $B(0,b,0)$ ، $C(0,0,c)$

حيث: a، b، c أعداد طبيعية غير معدومة و $ab+bc+ac=0$

1) عين بدلالة a، b، c الإحداثيات (x,y,z) للنقطة G مرجح الجملة: $\{(A,b+c),(B,a+c),(C,a+b)\}$

2) أحسب المجموع: $x+y+z$ ثم استنتج مجموعة النقط G.

36: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$ النقاط: $A(3,0,0)$ ، $B(0,4,0)$ ، $C(7,3,0)$.

1) عين إحداثيات النقطة G مرجح الجملة:

$$\{(A,-1),(B,1),(C,1)\}$$

2) حدد المجموعة (P) للنقط M من الفضاء التي تحقق:

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}\|=OM$$

37: B ، A نقطتان متمايزتان من الفضاء.

حدد المجموعة (P) للنقط M من الفضاء حيث يكون الشعاعان $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}$ ، $\overrightarrow{AB}$ متعامدين.

38: ABC مثلث حيث: $AB = 16\text{ cm}$ ، $AC = 20\text{ cm}$ ، $BC = 28\text{ cm}$

نضع: $\vec{V_1}=7\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}$ ، $\vec{V_2}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$

حيث: M نقطة كيفية من الفضاء.

1) أعط عبارة بسيطة للشعاع $\vec{V_1}$.

2) بين أن الشعاع $\vec{V_2}$ مستقل عن النقطة M ثم احسب $\|\vec{V_2}\|$.

3) عين مجموعة النقط M من الفضاء حيث يكون: $\|\vec{V_1}\|=\|\vec{V_2}\|$.

39: ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث: $AB = AC = BC = 2\text{Cm}$.

1: (S_1) هي مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق:

$$2AM^2+BM^2+CM^2=8$$

أ) تحقق أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (S_1).

ب) حدد المجموعة (S_1) وعناصرها المميزة.

2: عين المجموعة (S_2) للنقط M من الفضاء التي تحقق:

$$-2AM^2+BM^2+CM^2=8$$

المعادلات الوسيطية لمستقيم:

في كل ما يأتي الفضاء مزود بالمعلم $(O;I,J,k)$.

40: بين أن الشعاعين $\vec{u}(1,0,2)$ ، $\vec{v}(2,0,4)$ مرتبطان خطيا.

41: بين أن الأشعة $\vec{u}(-2,1,3)$ ، $\vec{v}(2,-1,1)$ ، $\vec{w}(6,-3,-1)$ مرتبطة خطيا.

42: 1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(1,0,2)$ وشعاع توجيه له $\vec{u}(2,1,-1)$.

2) بين أن النقطة $B(5,2,1)$ لا تنتمي إلى المستقيم (Δ).

43: عين معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(1,-1,2)$ وشعاع توجيه له $\vec{u}(3,2,1)$.

44: عين شعاع توجيه للمستقيم (Δ) المعرف بجملة المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} x-y+z-5=0 \\ x-3y+6=0 \end{cases}$$

45: تعطى النقطتان: $A(1,3,2)$ ، $B(3,2,5)$.

أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) ثم القطعة $[AB]$.

46: عين إحداثيات النقطة A نقطة تقاطع المستوي (OIK) والمستقيم (Δ) المعرف بجملة المعادلات الوسيطية التالية:

$$\begin{cases} x=2-t \\ y=1+t \\ z=1-3t \end{cases}$$ ، مع t عدد حقيقي.

47: t وسيط حقيقي حيث: $-1\le t\le 3$.

عين مجموعة النقط M من الفضاء التي إحداثياتها (x,y,z) تحقق:

$$\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=2-3t^2 \\ z=2+2t^2 \end{cases}$$

بعد نقطة عن مستقيم:

في كل ما يأتي الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;I,J,k)$.

48: يعطى المستقيم (Δ) حيث:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=-2+t \end{cases}$$ ، مع: t عدد حقيقي.

1) عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة $A(1,0,1)$ على المستقيم (Δ).

2) أحسب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ).

49: نعتبر في الفضاء النقطة $A(0,1,1)$ والمستقيم (Δ) حيث:

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=-1 \\ z=t \end{cases}$$ مع: t عدد حقيقي.

لتكن M نقطة من المستقيم (Δ) و f الدالة المعرفة على IR كما يلي: $f(t)=AM^2$.

1) شكل جدول تغيرات f ثم عين أصغر قيمة تبلغها الدالة f.

2) استنتج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ).

50: لتكن النقطتان $A(1,2,1)$ ، $B(2,-2,-1)$ والمستقيم (Δ) حيث:

$$\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=1-t \end{cases}$$ مع: t عدد حقيقي.

1) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A ويعامد (Δ) ثم احسب بعد النقطة B عن المستوي (P).

2) تحقق أن B تنتمي إلى المستقيم (Δ) ثم استنتج بعد A عن (Δ).

الأوضاع النسبية: في كل ما يأتي الفضاء مزود بالمعلم $(O;I,J,k)$.

51: نعتبر المستقيمين (Δ)، (Δ'):

$$(\Delta'): \begin{cases} x=1+t' \\ y=3-t' \\ z=2+t' \end{cases} \quad ، \quad (\Delta): \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$$

حيث: t، t' عددان حقيقيان.

بين أن المستقيمين (Δ)، (Δ') متقاطعان في نقطة يطلب تحديدها.

52: بين أن المستقيمين (Δ)، (Δ') لا ينتميان إلى نفس المستوي حيث:

$$(\Delta'): \begin{cases} x=3+t' \\ y=1+2t' \\ z=3-t' \end{cases} \quad ، \quad (\Delta): \begin{cases} x=2 \\ y=3+t \\ z=t \end{cases}$$

حيث: t، t' عددان حقيقيان.

53: أثبت أن المستقيمين (Δ)، (Δ') متوازيان ومختلفان حيث:

$$(\Delta'): \begin{cases} 2y+z-5=0 \\ 4x-2y+5z-4=0 \end{cases} \quad ، \quad (\Delta): \begin{cases} x-y+z-5=0 \\ x-3y+6=0 \end{cases}$$

54: عين نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (OIK) حيث:

$$(\Delta): \begin{cases} x=4-t \\ y=2+t \\ z=1+2t \end{cases} \quad ; \quad t\in IR$$

55: بين أن المستقيم (Δ) يقطع المستوي (P) في نقطة يطلب تحديدها.

$$(P): \ -2x+y-z+4=0 \quad ; \quad (\Delta): \begin{cases} x=t \\ y=4-3t \\ z=2+t \end{cases} \ ; \ t\in IR$$

56: (Δ) مستقيم يشمل النقطة $A(0,2,1)$ وشعاع توجيه له $\vec{u}(1,0,2)$.

أدرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (P) المعرف بالمعادلة: $2x+y-z+3=0$.

57: نعتبر المستويين (P)، (P') المعرفين بالمعادلتين التاليتين على الترتيب:

$$x-3y+2z-4=0 \quad ، \quad 2x+y-z+1=0$$

بين أن (P)، (P') متقاطعان ثم عين شعاع توجيه مستقيم تقاطعهما.

58: m وسيط حقيقي و (P_1)، (P_2) مستويان معرفان بالمعادلتين التاليتين على الترتيب:

$$(m+1)x+(m-2)y+(3m-2)z+1=0 \quad ، \quad 2x-y+z+3=0$$

عين في كل حالة من الحالتين التاليتين قيمة الوسيط m حيث يكون:

أ) المستويان (P_1)، (P_2) متوازيين.

ب) المستويان (P_1)، (P_2) متعامدين.

59: حل الجملة التالية ثم أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة:

$$\begin{cases} 2x-3y-z=5 \\ -4x+6y+2z=1 \end{cases}$$

60: نعتبر المستويات (P_1)، (P_2)، (P_3) حيث:

$$(P_1): \quad x+3y+z-1=0 \quad ، \quad (P_2): \quad -3x+5y-z-2=0$$

$$(P_3): \quad -x+25y+3z-9=0$$

1) بين أن المستويين (P_1)، (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب إعطاء شعاع توجيه له.

2) أدرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (P_3).

3) استنتج مجموعة حلول الجملة التالية وأعط تفسيرا هندسيا للنتيجة:

$$\begin{cases} x+3y+z=1 \\ -3x+5y-z=2 \\ -x+25y+3z=9 \end{cases}$$

61: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;I,J,k)$ النقطة $A(1,-1,2)$ والشعاع $\vec{u}(-2,1,3)$

1: أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل A وشعاع توجيه له $\vec{u}$.

2: ليكن (D) المستقيم المعرف بجملة المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} 4x+y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$$

أ) عين مركبات شعاع توجيه المستقيم (D).

ب) بين أن المستقيمين (Δ)،(D) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

3: أ) أكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المبدأ O ويعامد (Δ).

ب) بين أن المستقيم (D) محتوى في المستوي (P).

62: بكالوريا المغرب دورة 2008 شعبة العلوم التجريبية.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$ النقطتين: $A(0,-1,1)$، $B(1,-1,0)$ وسطح الكرة (S) التي معادلتها:

$$x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0 .$$

1: بين أن مركز سطح الكرة (S) هو $w(1,0,2)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

تحقق أن النقطة A تنتمي إلى سطح الكرة (S).

2: بين أن معادلة المستوي (OAB) هي: $x+y+z=0$.

3: أثبت أن المستوي (OAB) مماس لسطح الكرة (S) في النقطة A.

63: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$ المجموعة (S) للنقط M التي إحداثياتها (x,y,z) تحقق المعادلة:

$$x^2+y^2+z^2+2x-2y-2=0$$

1: أثبت أن المجموعة (S) سطح كرة يطلب تعيين مركزها w وطول نصف قطرها R.

2: m وسيط حقيقي و (P_m) المستوي المعرف بالمعادلة: $3x-4z+m=0$

أ) بين أن المستوي (P_0) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C) يطلب تحديد مركزها A وطول نصف قطرها r.

ب) أدرس حسب قيم m الوضع النسبي للمستوي (P_m) والكرة (S).

تمارين ومسائل متنوعة:

64: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$ النقاط: $A(1,0,2)$ ، $B(1,1,4)$ ، $C(-1,1,1)$.

1: أ) أثبت أن النقاط A، B، C ليست على استقامة واحدة.

ب) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(3,4,-2)$ ناظم للمستوي (ABC).

ج) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2: ليكن المستويان (P_1) ، (P_2) المعرفين بالمعادلتين التاليتين على الترتيب: $2x+y+2z+1=0$ ، $x-2y+6z=0$

أ) بين أن المستويين متقاطعان وفق مستقيم (Δ).

ب) أكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم (Δ).

ج) أدرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (ABC).

3: t عدد حقيقي موجب.

G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,2),(C,t)\}$

أ) تحقق أن G موجودة.

ب) لتكن النقطة I المعرفة بالعلاقة: $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

حدد احداثيات النقطة I.

ج) أكتب الشعاع $\overrightarrow{IG}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{IC}$.

د) بين أن مجموعة النقط G عندما يتغير t في المجال $]0,+\infty[$ هي مجموعة نقاط القطعة $[IC]$ ما عدا النقطة C.

هـ) حدد قيمة t حتى تكون G منتصف $[IC]$.

65: A ، B ، C ثلاث نقاط من الفضاء ليست على استقامة واحدة و G_K مرجح الجملة: $\{(A,K^2+1),(B,K),(C,-K)\}$

حيث: K عدد حقيقي من المجال $[-1,1]$.

1: أ) مثل النقاط A ، B ، C ، I حيث: I منتصف القطعة $[BC]$.

ب) بين أن: $\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{CI}$ ، $\overrightarrow{AG_{-1}}=\overrightarrow{BI}$

ج) استنتج أن: A منتصف $[G_1G_{-1}]$ وأن: $\overrightarrow{G_1G_{-1}}=\overrightarrow{BC}$

ثم أنشئ النقطتين G_1 ، G_{-1}.

2: أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي K من المجال $[-1,1]$:

$$\overrightarrow{AG_K}=\frac{-K}{K^2+1}\overrightarrow{BC}$$

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f المعرفة على المجال $[-1,1]$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{-x}{x^2+1}$

ج) استنتج مجموعة النقط G_K عندما يتغير K في المجال $[-1,1]$.

3: حدد مجموعة النقط M من الفضاء حيث:

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

66: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2008 شعبة العلوم التجريبية.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$

النقاط: $A(2,0,1)$ ، $B(3,2,0)$ ، $C(-1,-2,2)$

والمستوي (P) المعرف بالمعادلة: $x+2y-z+7=0$.

1: تحقق أن النقاط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة ثم بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $y+2z-2=0$.

2: أ) تحقق أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان ثم عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (ABC).

ب) أحسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

3: لتكن G مرجحا للجملة المثقلة: $\{(A,1),(B,\alpha),(C,\beta)\}$

حيث α ، β عددان حقيقيان يحققان: $\alpha+\beta\neq-1$

عين قيمة العدد α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ).

67: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2008 شعبة الرياضيات.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$

النقاط : $A(0,2,1)$ ، $B(-1,1,-3)$ ، $C(1,0,-1)$.

1: أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها C وتشمل النقطة A.

2: ليكن المستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي:

$$\begin{cases}x=-1-t\\ y=1+2t\\ z=-3+2t\end{cases}$$ مع: t عدد حقيقي.

أ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل C ويعامد (Δ).

ب) أحسب المسافة بين النقطة C والمستقيم (Δ).

ج) استنتج الوضع النسبي للمستقيم (Δ) وسطح الكرة (S).

68: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2008 شعبة التقني رياضيات.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$

النقاط: $A(1,2,2)$ ، $B(3,2,1)$ ، $C(1,3,3)$.

1) أثبت أن النقاط A ، B ، C تعين مستويا يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له.

2) نعتبر المستويين (P_1) ، (P_2) المعرفين بالمعادلتين الديكارتيتين التاليتين على الترتيب: $x-2y+2z-1=0$ ، $x-3y+2z+2=0$.

أثبت أن المستويين (P_1) ، (P_2) متقاطعان وفق مستقيم وليكن (Δ).

3) بين أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ).

4) بين أن $\vec{u}(2,0,-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

5) استنتج أن التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) هو:

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=3 \\ z=3-t \end{cases}$$

مع: t عدد حقيقي.

6) لتكن M نقطة كيفية من المستقيم (Δ).

أوجد قيمة الوسيط t حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ ، $\vec{u}$ متعامدين ثم استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

69: نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد المتجانس $(O;I,J,k)$

النقطة $A(1,-2,1)$ والشعاع $\vec{u}(-2,1,5)$.

1: أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A وشعاع ناظم له الشعاع $\vec{u}$.

2: بين أن المستوي (P) عمودي على المستوي (P') المعرف بالمعادلة: $x+2y-7=0$.

3: ليكن المستقيم (Δ) الناتج من تقاطع المستويين (P) و (P').

بين أن المستقيم (Δ) يشمل النقطة $B(-1,4,-1)$ وشعاع توجيه له $\vec{v}(2,-1,1)$.

4: أحسب بعد النقطة $C(5,-2,-1)$ عن كل من المستويين (P) ، (P') ثم استنتج بعد النقطة C عن المستقيم (Δ).

5: من أجل كل عدد حقيقي t نعتبر النقطة M التي إحداثياتها $(1+2t,3-t,t)$.

أ) تحقق أن النقطة M تنتمي إلى المستقيم (Δ).

ب) لتكن الدالة f المعرفة على IR كما يلي: $f(t)=CM^2$.

بين أن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى يطلب تحديدها ثم استنتج بعد النقطة C عن المستقيم (Δ).

70: نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$

النقاط: $A(1,1,0)$ ، $B(1,2,1)$ ، $C(3,-1,2)$

1: أ) أثبت أن النقاط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

ب) بين أن معادلة المستوي (ABC) هي: $2x+y-z-3=0$.

2: نعتبر المستويين (P) ، (P') المعرفين بالمعادلتين التاليتين على الترتيب: $x+2y-z-4=0$ ، $2x+3y-2z-5=0$.

أثبت أن المستويين (P) ، (P') متقاطعان وفق مستقيم (Δ) تمثيله الوسيطي:

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \end{cases} ;\quad t\in IR$$

3: حدد تقاطع المستويات (ABC) ، (P) ، (P').

4: أحسب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ).

71: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$

النقاط: $A(2,-3,-1)$ ، $B(1,0,2)$ ، $C(0,1,3)$

1: بين أن النقاط A ، B ، C تعين مستويا.

2: أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3: θ عدد حقيقي حيث: $-\pi \le \theta < \pi$.

نعرف المجموعة (S) للنقط M من الفضاء التي إحداثياتها (x,y,z)

تحقق المعادلة: $x^2+y^2+z^2-2\theta x-2(\sin\theta)y+2z+\theta^2-\cos^2\theta=0$.

أ) بين أن (S) سطح كرة يطلب تعيين إحداثيات مركزها ω وطول نصف قطرها R.

ب) أدرس حسب قيم θ عدد نقاط تقاطع (ABC) وسطح الكرة (S).

ج) في حالة المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S).
عين إحداثيات نقطة التماس H.

72: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$

النقاط: $A(3,-2,2)$ ، $B(6,1,5)$ ، $C(6,-2,-1)$ ، $D(0,4,-1)$.

1) برهن أن المثلث ABC قائم في A.

2) بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

3) أحسب الحجم V لرباعي الوجوه $ABCD$.

4) عين قيسا بالراديان للزاوية $(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})$.

5) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) العمودي على (AC) في A.

6) ليكن (P') المستوي المعرف بالمعادلة: $x+y+z-3=0$.

برهن أن المستوي (P') عمودي على المستقيم (AB) في A.

7) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) ، (P').

73: بكالوريا تونس دورة 2008 شعبة العلوم التجريبية.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$

النقاط: $A(3,2,6)$ ، $B(1,2,4)$ ، $C(4,-2,5)$.

1: بين ان الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ متعامدان.

2: أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3: عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC) ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $OABC$.

4: لتكن (S) سطح الكرة التي مركزها O وتشمل النقطة A.

أ) بين أن تقاطع (S) مع المستوي (ABC) هو دائرة (C) مركزها H.

ب) احسب طول نصف قطر الدائرة (C).

5: لتكن G مرجح الجملة $\{(O,3),(A,1),(B,1),(C,1)\}$.

أ) عين إحداثيات النقطة G ثم احسب بعد G عن المستوي (ABC).

ب) بين أن المجموعة (S') للنقط M من الفضاء حيث:

$\left\| 3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} \right\| = 4$ هي سطح كرة يطلب تحديد مركزها وطول نصف قطرها R.

ج) استنتج أن المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S').

74: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$

المستويين (P_1)،(P_2) المعرفين بالمعادلتين التاليتين على الترتيب:

$2y+z-6=0$ ، $y-2z+12=0$

1) برهن أن المستويين (P_1)،(P_2) متعامدان.

2) تعطى النقطتان $A(3,0,6)$ ، $B(0,0,6)$.

بين أن المستويين (P_1)،(P_2) متقاطعان وفق المستقيم (AB).

3) عين إحداثيات النقطتين D، C نقطتي تقاطع المحور $(O ; J)$ مع كل من المستويين (P_1)، (P_2) على الترتيب.

4) أكتب معادلة للمستوي (P_3) الذي يشمل C وشعاع ناظم له $\overrightarrow{AD}$.

5) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (OA) ثم عين إحداثيات النقطة E نقطة تقاطع المستقيم (OA) والمستوي (P_3).

6) ماذا تمثل النقطة E بالنسبة إلى المثلث ACD ؟

75: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$ النقاط: $A(1,-1,3)$ ، $B(1,1,3)$ ، $C(1,1,-3)$ ، $D(19,-1,3)$ ، $E(19,1,3)$ ، $F(19,1,-3)$.

1: أحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ ثم استنتج نوع المثلث ABC.

2: بين أن الشعاع $\overrightarrow{AD}$ ناظم للمستوي (ABC) ثم أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3: بين أن الشعاعين $\overrightarrow{CE}$ ، $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطيا وأعط تفسيرا للنتيجة

4: عين إحداثيات النقطة G حيث يكون الرباعي $ABCG$ مستطيل.

5: تحقق أن النقاط D، E، F ليست على استقامة واحدة.

6: أدرس الوضع النسبي للمستويين (ABC) ، (DEF).

7: أ) احسب الأطوال a، b، c للقطع $[AB]$، $[BC]$، $[AD]$ على الترتيب.

ب) بين أن المتتالية (a,b,c) هندسية ثم حدد أساسها q.

76: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$ النقاط: $A(1,2,3)$ ، $B(0,1,4)$ ، $C(-1,-3,2)$ ، $D(4,-2,5)$

1: بين أن النقاط A، B، C تعين مستويا.

2: أوجد إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

3: أ) تحقق أن الشعاع $\vec{u}(2,-1,1)$ يعامد كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$

ب) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

4: (Δ) مستقيم يشمل النقطة D وشعاع توجيه له $\vec{v}(-2,1,-1)$

بين أن المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC).

5: أثبت أن النقطة G هي المسقط العمودي للنقطة D على (ABC).

77: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$ النقاط: $A(6,-6,6)$ ، $B(-6,0,6)$ ، $C(-2,-2,11)$

1) أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها B وتشمل النقطة A.

2) أكتب معادلة للمستوي (P) المماس لسطح الكرة (S) في A.

3) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي على (P) ويشمل C.

4) حدد إحداثيات النقطة D نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (P).

5) أدرس الوضع النسبي للمستقيمين (AD)، (BC).

78: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2008 شعبة الرياضيات.

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; I, J, k)$ نعتبر المستقيمين (Δ)، (Δ') المعرفين بالتمثيلين الوسيطيين التاليين على الترتيب:

$$\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 2+0.5\lambda \\ z = -2-2\lambda \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x = 6+\alpha \\ y = 1-2\alpha \\ z = 5+\alpha \end{cases}$$

حيث: λ، α عددان حقيقيان.

1: بين أن المستقيمين (Δ)، (Δ') لا ينتميان إلى نفس المستوي.

2: M، N نقطتان متغيرتان من (Δ)، (Δ') على الترتيب.

أ) عين إحداثيات M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من المستقيمين (Δ)، (Δ').

ب) أحسب الطول MN.

3: عين معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل (Δ) ويوازي (Δ').

4: أحسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') والمستوي (P)، ماذا تلاحظ ؟

79: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,k)$ المستويين (P_1)،(P_2) المعرفين بالمعادلتين التاليتين على الترتيب: $2x-y+2z-5=0$ ، $2x+2y-z-4=0$

1: بين أن المستويين (P_1)،(P_2) متعامدان.

2: أحسب بعد النقطة $A(1,2,-1)$ عن كل من المستويين (P_1) و (P_2)

3: أ) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1)،(P_2).

ب) أحسب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ).

4: M نقطة متغيرة من (Δ)، عين إحداثيات النقطة M حيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن ثم استنتج بعد النقطة A عن (Δ).

80: $(O;I,J,k)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء و $SABCD$ هرم رأسه S وقاعدته $ABCD$ حيث: $S(0,0,5)$ ، $A(0,2,0)$ ، $B(2,0,0)$ ، $C(0,-2,0)$ ، $D(-2,0,0)$.

1: بين أن الرباعي $ABCD$ مربع.

2: حدد دون حساب معادلة المستوي (P) الذي يشمل النقاط A، B، C، D.

3: أ) تحقق أن الشعاع $\vec{u}(5,5,2)$ ناظم للمستوي (ABS).

ب) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABS).

4: تحقق أن معادلة المستوي (BCS) هي: $5x-5y+2z-10=0$.

5: أ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P') الذي يشمل النقطة $E(0,1,0)$ ويوازي المستوي (BCS).

ب) حدد نقاط تقاطع المستوي (P') مع كل من المستقيمات: (OI) ، (OJ) ، (OK).

81: $(O;I,J,K)$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

نعتبر المجموعة (S_m) للنقط M من الفضاء التي إحداثياتها (x,y,z) تحقق المعادلة: $x^2+y^2+z^2-2mx+2my-4mz-1=0$.

1) أثبت أن (S_m) سطح كرة ثم حدد مركزها ω ونصف قطرها R.

2) بين أنّ مجموعة النقط ω هي مستقيم يطلب تحديد مركبات شعاع توجيه له.

3) أثبت أنّ المجموعة (S_m) تشمل دائرة ثابتة (C) يطلب إعطاء مركزها وطول نصف قطرها.

4) ليكن (P) المستوي المعرف بالمعادلة: $x-y-z+\sqrt{3}=0$.

حدد قيمة m التي من أجلها يكون (P) مماسا لسطح الكرة (S_m).

82: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة العلوم التجريبية.

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;I,J,K)$

نعتبر النقاط: $A(1,0,2)$ ، $B(0,2,1)$ ، $C(2,1,3)$

1: (P) مستو معادلة له من الشكل $x-z+1=0$

أ) بين أن المستوي (P) هو المستوي (ABC).

ب) ما طبيعة المثلث ABC ؟

2: أ) تحقق من أن النقطة $D(2,3,4)$ لا تنتمي إلى (ABC).

ب) حدد طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

3: أ) أحسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).

ب) أحسب حجم الرباعي $ABCD$.

83: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة الرياضيات.

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,K)$.

نعتبر النقطتين $A(2,1,2)$ ، $B(0,2,-1)$ والمستقيم (D) ذو التمثيل الوسيطي:

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases} \quad \text{حيث: } t\in IR$$

1: أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

أثبت أن (D) و (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

2: نعتبر المستوي (P) الذي يشمل المستقيم (AB) ويوازي (D).

أ) بين أن الشعاع $\vec{n}(1,5,1)$ عمودي على المستوي (P).

ب) أكتب معادلة للمستوي (P).

ج) بين أن المسافة بين نقطة كيفية M من المستقيم (D) والمستوي (P) مستقلة عن موضع النقطة M.

د) عين تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطع المستوي (P) مع المستوي (yoz)

84: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة الرياضيات.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,K)$

المستويين (P_1)،(P_2) حيث: $x+2y-z-2=0$ معادلة للمستوي (P_1)

و (P_2) تمثيل وسيطي للمستوي
$$\begin{cases} x=1+2\alpha+\beta \\ y=1+\alpha \\ z=5+\alpha+\beta \end{cases} \quad ; \quad (\alpha,\beta)\in IR^2$$

1: أكتب معادلة للمستوي (P_2).

2: عين شعاعا ناظميا $\vec{n_1}$ للمستوي (P_1) وشعاعا ناظميا $\vec{n_2}$ للمستوي (P_2)

3: بين أن المستويين (P_1)،(P_2) متعامدان.

4: أ) $A(3,1,1)$ نقطة من الفضاء، عين المسافة d_1 بين النقطة A والمستوي (P_1) والمسافة d_2 بين النقطة A والمستوي (P_2).

ب) استنتج المسافة d_3 بين النقطة A والمستقيم (Δ) تقاطع (P_1) و (P_2).

5: أ) عين تمثيلا وسيطيا بدلالة λ للمستقيم (Δ) حيث: λ عدد حقيقي.

ب) M نقطة كيفية من المستقيم (Δ).

أحسب AM^2 بدلالة λ مستنتجا ثانية المسافة بين A و (Δ).

85: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة التقني رياضيات.

1: نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,K)$

النقاط: $A(1,1,2)$ ، $B(-1,0,-2)$ ، $C(-1,0,-6)$

بين أن مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق: $AM^2-BM^2=1$

هي مستو (P) عمودي على المستقيم (AB) يطلب تعيين معادلة له.

2: لتكن (S) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق المعادلة:

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$$

برهن أن (S) سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها R.

3: G نقطة من الفضاء معرفة بالعلاقة: $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

أ) عين احداثيات النقطة G ثم تأكد أنها تنتمي إلى (S).

ب) أكتب معادلة للمستوي (Q) الذي يمس سطح الكرة (S) في النقطة G.

86: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2008 شعبة العلوم التجريبية.

▪ توجد إجابة واحدة فقط صحيحة يطلب تعيينها مع التعليل.

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;I,J,K)$.

نعتبر المستوي (P) المعرف بالمعادلة: $x-3z-4=0$ والنقاط:

$A(1,3,-1)$ ، $B(4,1,0)$ ، $C(-2,0,-2)$ ، $D(3,2,1)$.

1: المستوي (P) هو:

أ) (BCD) ، ب) (ABC) ، ج) (ABD).

4) التمثيل الوسيطي للمستقيم (CD) هو:

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=1-t \end{cases}$$ مع: t عدد حقيقي

5) النقطة E تنتمي إلى المستقيم (CD).

حلول التمارين والمسائل

الجداء السلمي:

1: حساب جيب تمام الزاوية $(\vec{u}, \vec{v})$.

لدينا: $\vec{u}(0,3,4)$ ، $\vec{v}(2,2,1)$ ومنه: $\|\vec{u}\|=5$ ، $\|\vec{v}\|=3$.

لدينا من جهة: $\vec{u}.\vec{v}=(2)(0)+(2)(3)+(1)(4)=10$

ومن جهة أخرى: $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u}, \vec{v})$

أي: $10=5\times3\times\cos(\vec{u}, \vec{v})$ إذن: $\cos(\vec{u}, \vec{v})=\frac{2}{3}$

2: 1) تحديد قيس للزاوية $(\vec{u}, \vec{v})$.

لدينا: $\vec{u}(1,1,0)$ ، $\vec{v}(0,1,1)$ ومنه: $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=\sqrt{2}$

لدينا من جهة: $\vec{u}.\vec{v}=(0)(1)+(1)(1)+(1)(0)=1$

ومن جهة أخرى: $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u}, \vec{v})$

أي: $1=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\cos(\vec{u}, \vec{v})$ معناه: $\cos(\vec{u}, \vec{v})=\frac{1}{2}$

إذن: قيس الزاوية $(\vec{u}, \vec{v})$ هو: $\frac{\pi}{3}$ أو $-\frac{\pi}{3}$.

2) تعيين قيمة كل من العددين a ، b.

بما أن: $\vec{w}$ عمودي على $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ فإن: $\vec{w}.\vec{u}=0$ و $\vec{w}.\vec{v}=0$

ومنه: $\begin{cases} 1+a=0 \\ a+b=0 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} a=-1 \\ b=-a=1 \end{cases}$

إذن: مركبات الشعاع $\vec{w}$ هي $(1,-1,1)$.

لدينا: $\|\vec{w}\|^2=(1)^2+(-1)^2+(1)^2=3$ ومنه: $\|\vec{w}\|=\sqrt{3}$

3: 1) حساب $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DC}$ واستنتاج نوع المثلث BCD.

لدينا: $\overrightarrow{BD}(0,-4,0)$ ، $\overrightarrow{DC}(0,0,6)$

ومنه: $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DC}=0$ إذن: المثلث BCD قائم في النقطة D.

المساحة S للمثلث BCD تعطى بالعلاقة: $S=\frac{1}{2}\times BD\times DC$

لدينا: $BD=4$ و $DC=6$ ومنه: $S=\frac{1}{2}\times(4)\times(6)=12$

2) إثبات ان (AC) عمودي على المستوي (BCD).

■ نعلم أنه إذا كان مستقيم عموديا على مستقيمين متقاطعين من مستو فانه عمودي على هذا المستوي.

لدينا: $\overrightarrow{AC}(-2,0,0)$ ، $\overrightarrow{BD}(0,-4,0)$ ، $\overrightarrow{DC}(0,0,6)$

ومنه: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$ و $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DC}=0$

ومنه: الشعاع $\overrightarrow{AC}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{BD}$ ، $\overrightarrow{DC}$.

معناه: المستقيم (AC) عمودي على كل من المستقيمين (BD) و(DC).

إذن: المستقيم (AC) عمودي على المستوي (BCD).

■ الحجم V لرباعي الوجوه $ABCD$ يعطى بالعلاقة: $V=\frac{1}{3}\times S\times h$

حيث: h الارتفاع و S مساحة القاعدة BCD.

لدينا: $h=AC=2$ ومنه: $V=\frac{1}{3}(12)(2)=8$

4: تعيين الأشعة $\vec{w}$ العمودية على $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

بما أن: $\vec{w}$ عمودي على $\vec{u}$ و $\vec{v}$ فإن: $\vec{w}.\vec{v}=\vec{w}.\vec{u}=0$

ومنه: $\begin{cases}a+2b+3c=0\\2a+3b+c=0\end{cases}$ معناه: $\begin{cases}-2a-4b-6c=0\\2a+3b+c=0\end{cases}$

بالجمع نجد: $-b-5c=0$ معناه: $b=-5c$

نعوض عن b في المعادلة: $a+2b+3c=0$ فنجد: $a=7c$

ومنه: مركبات الأشعة العمودية على $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هي:

$(7c,-5c,c)$ مع: c عدد حقيقي

إذن: الأشعة $\vec{w}$ هي الأشعة المرتبطة خطيا مع الشعاع $\vec{m}(7,-5,1)$

5: حساب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}$

نعلم أن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB\times AD\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$

ومنه: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=a\times a\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}a^2$

لدينا: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

ومنه: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}=-a\times a\times\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}a^2$

استنتاج قيمة $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$:

لدينا: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

ومنه: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2=0$

بما أن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$ فإن: المستقيمين (AB) ، (CD) متعامدان.

6: 1) حساب $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD}$.

نعلم أن: $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}=EA\times EB\times\cos\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB}\right)$

ومنه: $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}=4\times4\times\cos\frac{\pi}{3}=16\left(\frac{1}{2}\right)=8$

بالمثل نجد: $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD}=8$

2) تبيين أن: (EA) ، (EC) متعامدان.

لدينا: $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}.\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}\right)$

ومنه: $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{BC}$

بما أن: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{AE}$

فإن: $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD}=8-8=0$

وهذا يعني أن: المستقيمين (EA) ، (EC) متعامدان.

تطبيقات الجداء السلمي:

المعادلة الديكارتية لسطح كرة:

7: كتابة معادلة لسطح الكرة (S):

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

تنتمي النقطة M الى سطح الكرة (S) إذا وفقط إذا كان: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$.

لدينا: $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-3\\y\\z-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ تكافئ: $(x-3)(x-1)+y(y-2)+z(z-1)=0$

بعد النشر والتبسيط نجد: $x^2+y^2+z^2-4x-2y-z+3=0$

8: كتابة معادلة لسطح الكرة (S).

بما أن: سطح الكرة (S) يشمل المبدأ O فإن: معادلة (S) من الشكل:

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz=0$$

وبما أن: النقاط A ، B ، C تنتمي إلى (S) فإن إحداثياتها تحقق المعادلة:

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz=0$$

$$\begin{cases}a+1=0\\3a+2c+13=0\\a+2b+2c+9=0\end{cases}$$ ومنه: $$\begin{cases}a=-1\\c=\dfrac{-13-3a}{2}=-5\\b=\dfrac{-9-a-2c}{2}=1\end{cases}$$

إذن: معادلة سطح الكرة (S) هي: $x^2+y^2+z^2-x+y-5z=0$

9: كتابة معادلة لسطح الكرة (S).

نصف قطر سطح الكرة (S) هو البعد بين المركز A والمستوي (P)

ومنه: $r=\frac{|1-1+1-4|}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

إذن: معادلة سطح الكرة (S) هي: $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=3$

10: تعيين إحداثيات نقط تقاطع (Δ) و (S).

لدينا: $x^2+y^2+z^2-2x-3=0$

ومنه: $(1)^2+(2t)^2+(2-2t)^2-2(1)-3=0$

نجد: $8t^2-8t=0$ أي: $8t(t-1)=0$ ومنه: $t=0$ أو $t=1$

إذن: إحداثيات نقطتا تقاطع المستقيم (Δ) وسطح الكرة (S) هما:

$(1,2,0)$ ، $(1,0,2)$

11: تعيين المركز A وطول نصف القطر r للدائرة (C).

لدينا معادلة سطح الكرة (S) هي: $x^2+y^2+z^2-3x=0$

أي: $(x-1.5)^2+y^2+z^2=2.25$.

إذن: مركز سطح الكرة (S) هو $\omega(1.5\,,0\,,0)$ وطول نصف قطرها $R=\sqrt{2.25}=1.5$.

بعد المركز ω عن المستوي (P) هو: $\frac{|1.5+0+0-1|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$ ؛

بما أن: $\frac{\sqrt{3}}{6}<1.5$ فإن: المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C) مركزها النقطة A المسقط العمودي للمركز ω على المستوي (P).

المستقيم (ωA) يشمل النقطة ω وشعاع توجيه له $\vec{u}(1,1,1)$.

ومنه: المعادلات الوسيطية للمستقيم (ωA) هي:

$$\begin{cases}x=1.5+t\\y=t\\z=t\end{cases}$$ مع: t عدد حقيقي.

لدينا: معادلة المستوي (P) هي: $x+y+z-1=0$

ومنه: $1.5+t+t+t-1=0$ نجد: $t=-\frac{1}{6}$

من أجل: $t=-\frac{1}{6}$ نجد: $(x,y,z)=\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{6},-\frac{1}{6}\right)$

إذن: إحداثيات النقطة A مركز الدائرة (C) هي: $\left(\frac{4}{3},\frac{-1}{6},\frac{-1}{6}\right)$.

نصف القطر r للدائرة (C) هو:

$$r^2 = R^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = (1.5)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{13}{6}$$ إذن: $r = \sqrt{\frac{13}{6}}$

12: 1) حساب طول نصف قطر سطح الكرة (S).

طول نصف القطر r لسطح الكرة (S) هو بعد المركز A عن (P).

ومنه: $r = \frac{|2-2(-1)+2(3)-1|}{\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(2)^2}} = \frac{9}{3} = 3$

2) تحديد إحداثيات نقطة التماس B.

الشعاع $\vec{u}(1,-2,2)$ ناظم للمستوى (P) وشعاع توجيه للمستقيم (AB).

ومنه: المعادلات الوسيطية للمستقيم (AB) هي:

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-2t \\ z = 3+2t \end{cases}$$ مع: t عدد حقيقي.

لدينا: معادلة المستوي (P) هي: $x-2y+2z-1=0$

ومنه: $(2+t)-2(-1-2t)+2(3+2t)-1=0$ أي: $t=-1$

من أجل: $t=-1$ نجد: $(x,y,z)=(1,1,1)$

إذن: إحداثيات نقطة التماس B هي $(1,1,1)$.

13: تحديد مجموعة النقط (S).

1) $x^2+y^2+z^2-8x=0$

لدينا: $a=-8$ ، $b=c=d=0$ ومنه: $\Delta = 64 > 0$

إذن: (S) سطح كرة مركزها $A(4,0,0)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{\Delta}}{2} = 4$.

2) $x^2+y^2+z^2-4x+2z+5=0$

لدينا: $a=-4$ ، $b=0$ ، $c=2$ ، $d=5$

ومنه: $\Delta = (-4)^2+(0)^2+(2)^2-(4)(5)=0$

إذن: المجموعة (S) تشمل نقطة واحدة A إحداثياتها $(2,0,-1)$.

3) $x^2+y^2+z^2-2y+2=0$

لدينا: $a=0$ ، $b=-2$ ، $c=0$ ، $d=2$

ومنه: $\Delta = (0)^2+(-2)^2+(0)^2-4(2)=-4<0$

إذن: المجموعة (S) هي المجموعة الخالية.

14: تعيين المجموعة (S) للنقط M.

لدينا: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=4$ ومنه: $\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}\right)=4$

أي: $\overrightarrow{OM}^2 - \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA} = 4$

معناه: $\overrightarrow{OM}^2 - \overrightarrow{OM}.\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right) = 4$

بما أن: النقطة O منتصف $[AB]$ فإن: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=\vec{0}$

وبالتالي: المعادلة $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=4$ تكافئ: $\overrightarrow{OM}^2=4$.

إذن: المجموعة (S) هي مجموعة نقاط سطح كرة مركزها المبدأ O وطول نصف قطرها 2.

15: تبيين أنه توجد كرتان تمسان المستوي (P).

نفرض $\omega(a,b,c)$ مركز سطح الكرة التي تمس المستوي (P).

بما أن: النقطة A تنتمي الى سطح هذه الكرة

فإن: $A\omega = 5$ أي: $A\omega^2 = 25$

ومنه: $(a-3)^2+(b-2)^2+(c-5)^2=25$ (1)

لدينا: معادلة المستوي (P) هي: $4x-3z+3=0$

ومنه الشعاع $\vec{u}(4,0,-3)$ ناظم للمستوي (P).

الشعاعان $\vec{u}$ ، $\overrightarrow{A\omega}$ مرتبطان خطيا.

ومنه: يوجد عدد حقيقي α حيث: $\overrightarrow{A\omega}=\alpha\vec{u}$

معناه: $\begin{cases} a-3=4\alpha \\ b-2=0 \\ c-5=-3\alpha \end{cases}$ أي: $\begin{cases} a=4\alpha+3 \\ b=2 \\ c=-3\alpha+5 \end{cases}$

نعوض عن الأعداد a ، b ، c في المعادلة (1) فنجد: $\alpha^2=1$

ومنه: $\alpha=1$ أو $\alpha=-1$.

إذن: توجد كرتان تمسان المستوي (P) في النقطة A مركزاهما: $\omega_1(7,2,2)$ ، $\omega_2(-1,2,8)$.

المعادلة الديكارتية لمستو:

16: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: $\vec{u}(2,1,3)$ شعاع ناظم للمستوي (P)

فإن: معادلة المستوي (P) من الشكل: $2x+y+3z+d=0$

وبما أن: النقطة $A(1,0,1)$ تنتمي إلى المستوي (P)

فإن: $2(1)+(0)+3(1)+d=0$ ومنه: $d=-5$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $2x+y+3z-5=0$

17: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

احداثيات النقطة C منتصف القطعة $[AB]$ هي: $(3,3,2)$.

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

تنتمي النقطة M إلى المستوي (P) إذا وفقط إذا كان: $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB}=0$

لدينا: $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

ومنه: $12(x-3)+2(y-3)+2(z-2)=0$

معناه: $6x+y+z-23=0$

18: تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (P).

طريقة أولى: نفرض $\vec{u}(a,b,c)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

ومنه: $\vec{u}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$.

وبالتالي: $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{u}=0$

ومنه: $\begin{cases} b-c=0 \\ -2a+2b-2c=0 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} b-c=0 \\ -a+b-c=0 \end{cases}$

نأخذ $c=1$ فنجد: $b=1$ ، $a=0$ إذن: $\vec{u}(0,1,1)$

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (P) إذا وفقط إذا كان: $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

أي: $0(x-1)+(y-0)+(z-2)=0$ معناه: $y+z-2=0$

طريقة ثانية: تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (P) إذا وفقط إذا كانت الأشعة $\overrightarrow{AM}$ ، $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً.

أي: $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ y & 1 & -2 \\ z-2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$

ومنه: $(x-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}+(z-2)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=0$

وبالتالي: $(x-1)(0)-y(2)+(z-2)(-2)=0$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $-2y-2z+4=0$

أي: $y+z-2=0$

19: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: المستوي (P) يشمل المستقيم (Δ) فإن: معادلة المستوي (P) من الشكل: $x+2y+3+\alpha(3x-2z-5)=0$ حيث: α عدد حقيقي.

وبما أن: النقطة $A(2,-3,1)$ تنتمي إلى المستوي (P) فإن:

$2+2(-3)+3+\alpha\left[3(2)-2(1)-5\right]=0$ ومنه: $\alpha=-1$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $x+2y+3-(1)(3x-2z-5)=0$

أي: $-x+y+z+4=0$

الشعاعان $\vec{u}$ ، $\overrightarrow{A\omega}$ مرتبطان خطيا.

ومنه: يوجد عدد حقيقي α حيث: $\overrightarrow{A\omega}=\alpha\vec{u}$

معناه: $\begin{cases} a-3=4\alpha \\ b-2=0 \\ c-5=-3\alpha \end{cases}$ أي: $\begin{cases} a=4\alpha+3 \\ b=2 \\ c=-3\alpha+5 \end{cases}$

نعوض عن الأعداد a، b، c في المعادلة (1) فنجد: $\alpha^2=1$

ومنه: $\alpha=1$ أو $\alpha=-1$.

إذن: توجد كرتان تمسان المستوي (P) في النقطة A مركزاهما: $\omega_1(7,2,2)$ ، $\omega_2(-1,2,8)$.

المعادلة الديكارتية لمستو:

16: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: $\vec{u}(2,1,3)$ شعاع ناظم للمستوي (P)

فإن: معادلة المستوي (P) من الشكل: $2x+y+3z+d=0$

وبما أن: النقطة $A(1,0,1)$ تنتمي إلى المستوي (P)

فإن: $2(1)+(0)+3(1)+d=0$ ومنه: $d=-5$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $2x+y+3z-5=0$

17: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

احداثيات النقطة C منتصف القطعة $[AB]$ هي: $(3,3,2)$.

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

تنتمي النقطة M إلى المستوي (P) إذا وفقط إذا كان: $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB}=0$

لدينا: $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

ومنه: $12(x-3)+2(y-3)+2(z-2)=0$

معناه: $6x+y+z-23=0$

18: تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (P).

طريقة أولى: نفرض $\vec{u}(a,b,c)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

ومنه: $\vec{u}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$.

وبالتالي: $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{u}=0$

ومنه: $\begin{cases} b-c=0 \\ -2a+2b-2c=0 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} b-c=0 \\ -a+b-c=0 \end{cases}$

نأخذ $c=1$ فنجد: $b=1$ ، $a=0$ إذن: $\vec{u}(0,1,1)$

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (P) إذا وفقط إذا كان: $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

أي: $0(x-1)+(y-0)+(z-2)=0$ معناه: $y+z-2=0$

طريقة ثانية: تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (P) إذا وفقط إذا كانت الأشعة $\overrightarrow{AM}$ ، $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً.

أي: $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ y & 1 & -2 \\ z-2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$

ومنه: $(x-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}+(z-2)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=0$

وبالتالي: $(x-1)(0)-y(2)+(z-2)(-2)=0$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $-2y-2z+4=0$

أي: $y+z-2=0$

19: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: المستوي (P) يشمل المستقيم (Δ) فإن: معادلة المستوي (P) من الشكل: $x+2y+3+\alpha(3x-2z-5)=0$ حيث: α عدد حقيقي.

وبما أن: النقطة $A(2,-3,1)$ تنتمي إلى المستوي (P) فإن:

$2+2(-3)+3+\alpha[3(2)-2(1)-5]=0$ ومنه: $\alpha=-1$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $x+2y+3-(1)(3x-2z-5)=0$

أي: $-x+y+z+4=0$

20: كتابة معادلة ديكارتية للمستوى (P).

بما أن: النقطة $A(-1,2,3)$ تنتمي إلى المستوي (P) فإن: معادلة المستوي (P) من الشكل: $a(x+1)+b(y-2)+c(z-3)=0$ حيث: a ، b ، c أعداد حقيقية ليست كلها معدومة.

وبما أن: المستوي (P) يوازي المستوي المعرف بالمعادلة:

$$-x+2y+z-3=0$$

فإن: شعاع ناظم المستوي (P) هو: $\vec{u}(-1,2,1)$

إذن: معادلة المستوي (P) هي:

$$(-1)(x+1)+(2)(y-2)+(z-3)=0$$

أي: $-x+2y+z-8=0$

21: تبيين أن المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) هو B.

تكون النقطة B المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) إذا وفقط إذا كان: ▪ النقطة B تنتمي الى المستوي (P).

▪ الشعاعان $\overrightarrow{BA}$ ، $\vec{u}$ مرتبطان خطيا حيث $\vec{u}$ ناظم للمستوي (P)

لدينا: $5(-1)-(1)+(0)+6=-6+6=0$

ومنه إحداثيات B تحقق المعادلة: $5x-y+z+6=0$

وهذا يعني أن: النقطة B تنتمي الى المستوي (P) (1)

لدينا معادلة المستوي (P) هي: $5x-y+z+6=0$

ومنه: الشعاع $\vec{u}(5,-1,1)$ ناظم للمستوي (P)

لدينا أيضا: مركبات الشعاع $\overrightarrow{BA}$ هي $(-5,1,-1)$

واضح أن: $\vec{u}=-\overrightarrow{BA}$

ومنه: الشعاعان $\overrightarrow{BA}$ ، $\vec{u}$ مرتبطان خطيا (2)

من (1) و (2) نستنتج أن: B هي المسقط العمودي للنقطة A على (P).

22: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: المستوى (P) يشمل النقطة $A(1,0,-2)$ فإن: معادلة (P) من الشكل: $a(x-1)+by+c(z+2)=0$ حيث: a ، b ، c أعداد حقيقية ليست كلها معدومة.

وبما أن: المستوي (P) عمودي على كل من المستويين المعرفين بالمعادلتين $2x+y-z-2=0$ ، $-x+y+z+3=0$

فإن: الشعاع الناظم $\vec{u}(a,b,c)$ للمستوي (P) عمودي على كل من الشعاعين $\vec{n}(2,1,-1)$ ، $\vec{m}(-1,1,1)$

ومنه: $\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{n}=0 \\ \vec{u}\cdot\vec{m}=0 \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} 2a+b-c=0 \\ -a+b+c=0 \end{cases}$

نجد: $a=-2b$ و $c=-3b$

من أجل: $b=1$ مثلا نجد: $a=-2$ ، $c=-3$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $(-2)(x-1)+y+(-3)(z+2)=0$

أي: $-2x+y-3z-4=0$

23: تبيين أن النقاط A ، B ، C ، D من مستو واحد.

لإثبات أن النقاط A ، B ، C ، D من مستو واحد نشكل معادلة المستوي (ABC) ثم نبين أن النقطة D تنتمي إلى هذا المستوي.

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (ABC) إذا وفقط إذا كانت: الأشعة $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطيا أي: $\begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ y+3 & 3 & 2 \\ z-4 & -2 & -2 \end{vmatrix}=0$

معناه: $(x-2)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}-(y+3)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}+(z-4)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=0$

وبالتالي: $-2(x-2)-2(y+3)-2(z-4)=0$

إذن: معادلة المستوي (ABC) هي: $x+y+z-3=0$

واضح أن إحداثيات النقطة D تحقق المعادلة: $x+y+z-3=0$

إذن: النقاط A ، B ، C ، D تنتمي إلى مستو واحد.

24: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: المستوي (P) يشمل المستقيم (Δ').

فإن: معادلة (P) تكتب من الشكل:

$x+2z-4+\alpha(y-z-2)=0$ حيث: α عدد حقيقي.

أي: $x+\alpha y+(2-\alpha)z-4-2\alpha=0$

وبما أن: المستوي (P) يوازي المستقيم (Δ)

فإن: شعاع ناظم المستوي (P) عمودي على شعاع توجيه (Δ).

مركبات شعاع ناظم المستوي (P) هي $(1,\alpha,2-\alpha)$ ومركبات شعاع توجيه (Δ) هي: $(1,1.5,2)$

ومنه: $1+1.5\alpha+2(2-\alpha)=0$ نجد: $\alpha=10$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $x+2z-4+10(y-z-2)=0$

أي: $x+10y-8z-24=0$.

25: تحديد المجموعة (P) للنقط M.

تذكير: $|x|=|y|$ تكافئ: $x=y$ أو $x=-y$

لدينا: $|2x-y+z+2|=|x-y+2z|$ ومنه:

$(2x-y+z+2)=(x-y+2z)$ أو $(2x-y+z+2)=-(x-y+2z)$

أي: $x-z+2=0$ أو $3x-2y+3z+2=0$

إذن: المجموعة (P) هي اتحاد مجموعة نقط المستويين المعرفين بالمعادلتين: $x-z+2=0$ ، $3x-2y+3z+2=0$

26: 1: تبيين أن المجموعة (P_m) مستو.

لدينا: $x+(2m+1)y+(3m+2)z-1=0$

بما أن: معامل المتغير x لا ينعدم فإن: (P_m) مستو من الفضاء.

2: إثبات أن (P_m) يشمل مستقيما ثابتا.

المعادلة: $x+(2m+1)y+(3m+2)z-1=0$

تكافئ: $x+y+2z-1+m(2y+3z)=0$

ومنه: المستوي (P_m) يشمل المستقيم المعرف بالمعادلتين:

$$\begin{cases} x+y+2z-1=0 \\ 2y+3z=0 \end{cases}$$

3: أ) تعيين المستوي الذي يشمل النقطة $A(3,1,1)$.

تنتمي النقطة A إلى المستوي (P_m) إذا كان:

$(3)+(2m+1)(1)+(3m+2)(1)-1=0$

أي: $5m+5=0$ معناه: $m=-1$.

إذن: المستوي الذي يشمل النقطة A هو (P_{-1}).

ب) تعيين المستوي الذي يعامد المستوي (P').

يتعامد المستويان (P') ، (P_m) إذا كان شعاعا ناظميهما متعامدين.

الشعاعان الناظميان للمستويين (P_m) ، (P') هما على التوالي:

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2m+1\\3m+2\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ تكافئ: $(2)(1)+(2m+1)(-1)+(3m+2)(1)=0$

أي: $m+3=0$ وبالتالي: $m=-3$

إذن: المستوي الذي يعامد المستوي (P') هو: (P_{-3}).

بعد نقطة عن مستو:

27: حساب بعد النقطة A عن المستوي (P).

نفرض d بعد النقطة A عن المستوي (P) فيكون:

$d=\frac{|2(-1)-3(3)+(2)+9|}{\sqrt{(2)^2+(-3)^2+(1)^2}}=\frac{0}{\sqrt{14}}=0$ ومنه: A تنتمي إلى المستوي (P).

28: 1) تعيين إحداثيات المركز A وطول القطر R.

لدينا: $x^2+y^2+z^2-2x+2z-7=0$

ومنه: $a=-2$ ، $b=0$ ، $c=2$ ، $d=-7$

إذن: إحداثيات المركز A لسطح الكرة (S) هي:

$$\left(\frac{a}{-2},\frac{b}{-2},\frac{c}{-2}\right)=(1,0,-1)$$

طول نصف القطر R هو: $\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ حيث:

$\Delta=(-2)^2+(0)^2+(2)^2-4(-7)=36$ ومنه: $R=\frac{\sqrt{36}}{2}=3$

2) حساب بعد النقطة A عن المستوي (P).

نفرض d بعد النقطة A عن المستوي (P) فيكون:

$$d=\frac{|1+0-2(-1)+3|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-2)^2}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

لدينا: $\sqrt{6}<3$ أي: $d<R$

ومنه: المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C).

29: 1) تبيين أن المستويين (P_1)، (P_2) متعامدان.

المعادلتان الديكارتيتان للمستويين (P_1)، (P_2) هما على التوالي:

$x-y+3z+1=0$ ، $-x+2y+z+5=0$

ومنه: الشعاعان الناظميان للمستويين (P_1)، (P_2) هما:

$\overrightarrow{u_1}(1,-1,3)$ ، $\overrightarrow{u_2}(-1,2,1)$ على الترتيب.

بما أن: $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}=(-1)(1)+(2)(-1)+(1)(3)=0$

فإن: المستويين (P_1)، (P_2) متعامدان.

2) حساب بعد النقطة A عن كل من (P_1)، (P_2).

لتكن H_1، H_2، H_3 المساقط العمودية للنقطة A على (P_1)، (P_2)، (Δ) على الترتيب

ومنه: $AH_1=\frac{|1-2+3(-1)+1|}{\sqrt{11}}=\frac{3}{\sqrt{11}}$

$AH_2=\frac{|-1+2(2)-1+5|}{\sqrt{6}}=\frac{7}{\sqrt{6}}$

إذن: بعد A عن (P_1) هو: $\frac{3}{\sqrt{11}}$ وبعد A عن (P_2) هو: $\frac{7}{\sqrt{6}}$.

استنتاج بعد A عن المستقيم (Δ):

الرباعي $AH_1H_3H_2$ مستطيل ومنه: $AH_3{}^2=AH_1{}^2+H_1H_3{}^2$

معناه: $AH_3{}^2=AH_1{}^2+AH_2{}^2$

أي: $AH_3{}^2=\frac{9}{11}+\frac{49}{6}=\frac{593}{66}$ ومنه: $AH_3=\sqrt{\frac{593}{66}}$

إذن: بعد A عن المستقيم (Δ) هو: $\sqrt{\frac{593}{66}}$.

المرجح في الفضاء:

30: تبيين أن E منتصف $[DG]$.

بما أن: G مركز ثقل المثلث ABC فإنها مرجح للجملة:

$\{(A,1)،(B,1)،(C,1)\}$.

لدينا: E مرجح للجملة: $\{(D,3)،(A,1)،(B,1)،(C,1)\}$

ومنه: E مرجح للجملة $\{(D,3)،(G,3)\}$

بما أن: معاملي النقطتين D، G متساويان فإن: E منتصف $[DG]$.

31: برهان صحة: $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DH}=\vec{0}$.

بما أن: K مركز ثقل كل من رباعيي الوجوه ABCD ، EFGH فإن:

$$\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=\vec{0} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{KH}=\vec{0} \quad (2)$$

من (1) و(2) وبالطرح نجد:

$$\left(\overrightarrow{KE}-\overrightarrow{KA}\right)+\left(\overrightarrow{KF}-\overrightarrow{KB}\right)+\left(\overrightarrow{KG}-\overrightarrow{KC}\right)+\left(\overrightarrow{KH}-\overrightarrow{KD}\right)=\vec{0}$$

أي: $\left(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KE}\right)+\left(\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KF}\right)+\left(\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KG}\right)+\left(\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{KH}\right)=\vec{0}$

معناه: $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DH}=\vec{0}$.

32: برهان أن (AE)، (CF) متقاطعان في النقطة G.

بما أن: E، G مرجحان للجملتين التاليتين على الترتيب:

$\{(C,1),(B,2)\}$ ، $\{(A,-1),(B,2),(C,1)\}$

فإن: G مرجح للجملة $\{(A,-1),(E,3)\}$

ومنه: G تنتمي إلى المستقيم (AE) (1)

بما أن: F، G مرجحان للجملتين التاليتين على الترتيب:

$\{(A,-1),(B,2)\}$ ، $\{(A,-1),(B,2),(C,1)\}$

فإن: Gمرجح للجملة $\{(F,1),(C,1)\}$.

ومنه: G تنتمي إلى المستقيم (CF) (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المستقيمين (AE)، (CF) متقاطعان في G.

33: تعيين المجموعة (S) للنقط M من الفضاء:

لدينا: G مرجح للجملة $\{(A,2),(B,-3)\}$

ومنه: $2\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

لدينا أيضا: $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)-3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)$

ومنه: $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MG}+\left(2\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}\right)=\overrightarrow{GM}$

ومنه المعادلة: $\left\|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right\|=4$ تكافئ: $GM=4$

إذن: المجموعة (S) هي مجموعة نقط سطح الكرة التي مركزها G وطول نصف قطرها 4.

34: 1) تعيين إحداثيات النقطة G.

نفرض (x,y,z) إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC فيكون:

$$x=\frac{4+(-1)+1}{3}=\frac{4}{3} \quad ، \quad y=\frac{1+3+0}{3}=\frac{4}{3} \quad ، \quad z=\frac{-2+1+3}{3}=\frac{2}{3}.$$

2) تحديد إحداثيات النقطة D منتصف $[AB]$.

إحداثيات النقطة D منتصف القطعة $[AB]$ هي: $(1.5,2,-0.5)$

التحقق من صحة: $3\overrightarrow{CG}-2\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

مركبات كل من الشعاعين $3\overrightarrow{CG}$ ، $2\overrightarrow{CD}$ هما على التوالي:

$(1,4,-7)$ ، $(1,4,-7)$

ومنه: $3\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{CD}$ معناه: $3\overrightarrow{CG}-2\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

إذن: النقطة C هي مرجح الجملة: $\{(G,3),(D,-2)\}$

35: 1) تعيين الإحداثيات (x,y,z).

مجموع معاملات النقاط A، B، C هو:

$$(b+c)+(a+c)+(a+b)=2(a+b+c)\neq 0$$

ومنه: $x=\dfrac{a(b+c)}{2(a+b+c)}$ ، $y=\dfrac{b(a+c)}{2(a+b+c)}$ ، $z=\dfrac{c(a+b)}{2(a+b+c)}$

2) حساب المجموع $x+y+z$:

$$x+y+z=\frac{(ab+ac)+(ab+bc)+(ac+bc)}{2(a+b+c)}=\frac{2(ab+ac+bc)}{2(a+b+c)}=0$$

إذن: مجموعة النقط G محتواة في مجموعة نقاط المستوي المعرف بالمعادلة: $x+y+z=0$.

36: 1) تعيين إحداثيات النقطة G.

نفرض (x, y, z) إحداثيات النقطة G فنجد:

$x=-3+7=4$ ، $y=4+3=7$ ، $z=0$

2) تحديد المجموعة (P) للنقط M.

لدينا: $-\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ومنه:

$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)-\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)$$

أي: $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MG}+\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GA}\right)=\overrightarrow{MG}$

المعادلة: $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}\right\|=OM$ تكافئ: $GM=OM$.

إذن: مجموعة النقط (P) للنقط M من الفضاء هي مجموعة نقاط المستوي العمودي على القطعة [OG] في منتصفها.

37: تحديد مجموعة النقط (P) للنقط M.

نفرض G مرجح الجملة: $\{(A,1),(B,-2)\}$ فيكون: $\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

ومنه: $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)-2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)$

أي: $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MG}+\left(\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}\right)=\overrightarrow{GM}$

يكون الشعاعان $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}$ ، $\overrightarrow{AB}$ متعامدين إذا كان:

$\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right)=0$ أي: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GM}=0$

إذن: مجموعة النقط (P) هي مجموعة نقط المستوي الذي يشمل النقطة G وشعاع ناظم له $\overrightarrow{AB}$.

38: 1) إعطاء عبارة بسيطة للشعاع $\overrightarrow{V_1}$.

لتكن G مرجح الجملة: $\{(A,7),(B,5),(C,4)\}$

ومنه: $7\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GB}+4\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

ومنه: $\overrightarrow{V_1}=(7+5+4)\overrightarrow{MG}$ أي: $\overrightarrow{V_1}=16\overrightarrow{MG}$

2) تبيين أن الشعاع $\overrightarrow{V_2}$ مستقل عن النقطة M.

لدينا: $\overrightarrow{V_2}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$

بما أن: $2+(-1)+(-1)=0$ فإن: الشعاع $\overrightarrow{V_2}$ مستقل عن النقطة M

حيث: $\overrightarrow{V_2}=2\overrightarrow{MA}-\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

حساب $\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|$:

لدينا: $\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|^2=\left(-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2$

ومنه: $\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|^2=AB^2+AC^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

أي: $\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$

معناه: $\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|^2=AB^2+AC^2-\left[\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2-BA^2-AC^2\right]$

ومنه: $\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|^2=2AB^2+2AC^2-BC^2=2(16)^2+2(20)^2-(28)^2$

ومنه: $\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|^2=528$ إذن: $\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|=4\sqrt{33}$

3) تعيين مجموعة النقط M من الفضاء.

لدينا: $\left\|\overrightarrow{V_1}\right\|=\left\|\overrightarrow{V_2}\right\|$ ومنه: $16\,MG=4\sqrt{33}$ أي: $MG=\dfrac{\sqrt{33}}{4}$

إذن: مجموعة النقط M من الفضاء هي مجموعة نقط سطح كرة مركزها النقطة G وطول نصف قطرها $\dfrac{\sqrt{33}}{4}$.

39: 1: أ) التحقق أن A من المجموعة (S_1).

لدينا: $2AA^2+BA^2+CA^2=2(0)+(2)^2+(2)^2=8$

ومنه: النقطة A تنتمي إلى المجموعة (S_1).

ب) تحديد المجموعة (S_1) وعناصرها المميزة.

نعتبر النقطتين D ، G حيث:

G مرجح الجملة $\{(A,2),(B,1),(C,1)\}$

D منتصف الضلع [BC] أي: D مرجح الجملة $\{(B,1),(C,1)\}$

ومنه: G مرجح الجملة $\{(A,2)،(D,2)\}$

إذن: G منتصف الضلع $[AD]$.

بما أن: $2+1+1=4\neq 0$ فإن: المجموعة (S_1) هي:

المجموعة الخالية أو المجموعة $\{G\}$ أو مجموعة نقط سطح كرة.

حسب نتيجة السؤال (أ).

وبما أن: النقطة A تنتمي إلى (S_1) فإن: المجموعة (S_1) هي مجموعة نقط سطح كرة مركزها النقطة G وتشمل النقطة A.

2: تعيين المجموعة (S_2):

$$-2AM^2+BM^2+CM^2=-2AM^2+\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\right)^2+\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}\right)^2$$

ومنه: $-2AM^2+BM^2+CM=2\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right)+BA^2+CA^2$

ومنه: $-2AM^2+BM^2+CM^2=2\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right)+(2)^2+(2)^2$

أي: $-2AM^2+BM^2+CM^2=2\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right)+8$

معناه: $-2AM^2+BM^2+CM^2=-4\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}+8$

تنتمي النقطة M إلى المجموعة (S_2) إذا كان: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}=0$

إذن: مجموعة النقط (S_2) للنقط M من الفضاء هي مجموعة نقط المستوي الذي يشمل A وشعاع ناظم له $\overrightarrow{AD}$.

المعادلات الوسيطية لمستقيم:

40: تبيين أن الشعاعين $\vec{u}$، $\vec{v}$ مرتبطين خطيا

بما أنه: يوجد عدد حقيقي 2 حيث: $\vec{v}=2\vec{u}$

فإن: الشعاعين $\vec{u}$، $\vec{v}$ مرتبطان خطيا.

41: تبيين أن الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$، $\vec{w}$ مرتبطة خطيا.

تكون الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$، $\vec{w}$ مرتبطة خطيا إذا كان: محدد $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=0$

لدينا:
$$\begin{vmatrix}6&2&-2\\-3&-1&1\\-1&1&3\end{vmatrix}=(6)\begin{vmatrix}-1&1\\1&3\end{vmatrix}-(2)\begin{vmatrix}-3&1\\-1&3\end{vmatrix}+(-2)\begin{vmatrix}-3&-1\\-1&1\end{vmatrix}$$

ومنه:
$$\begin{vmatrix}6&2&-2\\-3&-1&1\\-1&1&3\end{vmatrix}=6(-4)-2(-8)-2(-4)=0$$

إذن: الأشعة $\vec{u}$، $\vec{v}$، $\vec{w}$ مرتبطة خطيا.

42: 1) كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستقيم (Δ) إذا وفقط إذا كان:

الشعاعان $\vec{u}$ ، $\overrightarrow{AM}$ مرتبطين خطيا.

أي: إذا وجد عدد حقيقي t حيث: $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$

معناه: $\begin{cases}x-1=2t\\y-0=t\\z-2=-t\end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases}x=1+2t\\y=t\\z=2-t\end{cases}$ مع: t عدد حقيقي.

2) تبيين أن النقطة B لا تنتمي إلى المستقيم (Δ).

الشعاعان $\vec{u}(2,1,-1)$ ، $\overrightarrow{AB}(4,2,-1)$ غير مرتبطين خطيا

وذلك لأن: $(2)(-1)\neq(-1)(1)$

وهذا يعني أن: النقطة B لا تنتمي إلى المستقيم (Δ).

طريقة أخرى: بما أن: إحداثيات النقطة B لا تحقق الجملة:

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=2-t \end{cases}$$

فإن: النقطة B لا تنتمي إلى (Δ).

43: تعيين معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (Δ).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من (Δ) إذا وجد عدد حقيقي t حيث: $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$

أي: $\begin{cases} x-1=3t \\ y+1=2t \\ z-2=t \end{cases}$ معناه: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=z-2$

معناه: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}=z-2 \\ \dfrac{y+1}{2}=z-2 \end{cases}$ إذن: $\begin{cases} x-3z+5=0 \\ y-2z+5=0 \end{cases}$

44: تعيين شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

النقطتان $A(-6,0,11)$ ، $B(-3,1,9)$ تنتميان إلى المستقيم (Δ).

ومنه: $\overrightarrow{AB}(3,1,-2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

طريقة أخرى: لدينا: $\begin{cases} x-y+z-5=0 \\ x-3y+6=0 \end{cases}$

ومنه:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

$$-3 \quad -1 \quad -2$$

إذن: مركبات شعاع توجيه للمستقيم (Δ) هي: $(-3,-1,-2)$.

45: كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) والقطعة $[AB]$.

تكون النقطة $M(x,y,z)$ من المستقيم (AB) إذا وجد عدد حقيقي t حيث: $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}$

أي: $\begin{cases} x-1=2t \\ y-3=-t \\ z-2=3t \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3-t \\ z=2+3t \end{cases}$

إذن: التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) هو:

$\begin{cases} x=1+2t \\ y=3-t \\ z=2+3t \end{cases}$ مع: t عدد حقيقي.

التمثيل الوسيطي للقطعة $[AB]$ هو:

$\begin{cases} x=1+2t \\ y=3-t \\ z=2+3t \end{cases}$ مع: $0\le t\le 1$.

46: تعيين إحداثيات النقطة A.

بما أن: النقطة A تنتمي إلى المستوي (OIK) فإن: $y=0$.

من أجل: $y=0$ نجد: $1+t=0$ أي: $t=-1$

إذن: إحداثيات نقطة التقاطع A هي: $(3,0,4)$

47: تعيين مجموعة النقط M.

لدينا: $-1\le t\le 3$ ومنه: $0\le t\le 3$ أو $-1\le t\le 0$

ومنه: $0\le t^2\le 9$ أو $0\le t^2\le 1$ إذن: $0\le t^2\le 9$

من أجل: $t^2=0$ نجد: $(x,y,z)=(1,2,2)$

من أجل: $t^2=9$ نجد: $(x,y,z)=(10,-25,20)$

إذن: مجموعة النقط M من الفضاء هي مجموعة نقط القطعة $[AB]$ حيث: $A(1,2,2)$ ، $B(10,-25,20)$

بعد نقطة عن مستقيم

48: 1) تعيين إحداثيات النقطة H.

بما أن: H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ)

فإن: H تنتمي إلى المستقيم (Δ) و $\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0$

حيث: $\vec{u}$ شعاع توجيه (Δ).

نفرض إحداثيات H هي: $(a\,,b\,,c)$ فيكون:

$\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0$ ومنه: $(a-1)(1)+(b)(-1)+(c-1)(1)=0$

أي: $a-b+c-2=0$ $\quad(1)$

النقطة H تنتمي إلى المستقيم (Δ) ومنه:

$a=1+t$ ، $b=-t$ ، $c=-2+t$ $\quad(2)$

من (1) و (2) نجد: $(1+t)-(-t)+(-2+t)-2=0$

أي: $t=1$ إذن: إحداثيات H هي: $(a\,,b\,,c)=(2\,,-1\,,-1)$

2) حساب بعد A عن المستقيم (Δ).

بعد A عن المستقيم (Δ) هو البعد بين النقطتين A و H.

لدينا: $AH^2=(2-1)^2+(-1-0)^2+(-1-1)^2=6$ ومنه: $AH=\sqrt{6}$

49: 1) تشكيل جدول تغيرات الدالة f.

نفرض $(x\,,y\,,z)$ إحداثيات M فيكون:

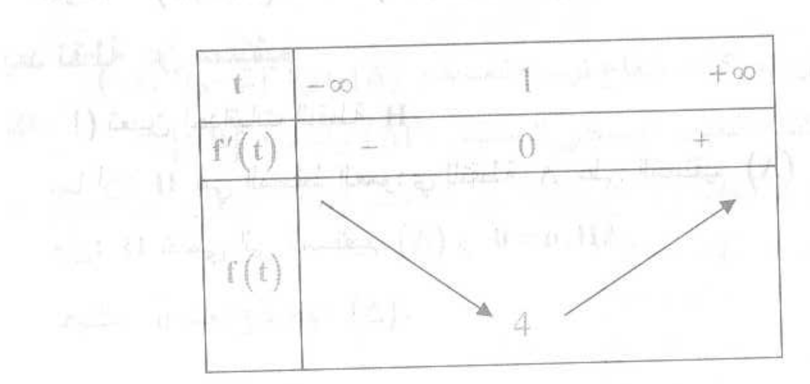
$f(t)=AM^2=x^2+(y-1)^2+(z-1)^2$

ومنه: $f(t)=(-1+t)^2+(-1-1)^2+(t-1)^2$

إذن: $f(t)=2t^2-4t+6$

الدالة f تقبل الإشتقاق على IR حيث: $f'(t)=4t-4$

ومنه: جدول تغيرات الدالة f



ومنه: أصغر قيمة تبلغها الدالة f هي: $f(1)=4$

2) استنتاج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ).

بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) هو: $AH=\sqrt{f(1)}=2$

50: 1) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: المستقيم (Δ) يعامد المستوي (P).

فإن: شعاع توجيه (Δ) هو شعاع ناظم للمستوي (P).

ومنه: $\vec{u}\,(1,-1,-1)$ شعاع ناظم للمستوي (P).

تكون نقطة $M(x\,,y\,,z)$ من المستوي (P) إذا كان: $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

أي: $x-y-z+2=0$

حساب بعد النقطة B عن المستوي (P).

بعد النقطة B عن (P) هو: $d=\dfrac{|2-(-2)-(-1)+2|}{\sqrt{3}}=\dfrac{7}{\sqrt{3}}$

2) التحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستقيم (Δ).

بما أن الجملة: $\begin{cases}2=t\\-2=-t\\-1=1-t\end{cases}$ تقبل حلا واحدا هو: $t=2$.

فإن: النقطة B تنتمي إلى المستقيم (Δ).

استنتاج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ).

نفرض H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) فيكون:

$AB^2=d^2+AH^2$ ومنه: $AH^2=AB^2-d^2$

لدينا: $AB^2=21$ و $d^2=\dfrac{49}{3}$ ومنه: $AH^2=21-\dfrac{49}{3}=\dfrac{14}{3}$

إذن: بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) هو: $AH=\sqrt{\dfrac{14}{3}}$.

الأوضاع النسبية:

51: تحديد نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) ، (Δ').

شعاعا توجيه (Δ)، (Δ') هما $\vec{u}(1,1,1)$ ، $\vec{v}(1,-1,1)$ على الترتيب.

بما أن: $(1)(1)\neq(-1)(1)$

فإن: الشعاعين $\vec{u}$، $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا

وهذا يعني أن: المستقيمين (Δ)، (Δ') غير متوازيين.

الجملة: $\begin{cases}1+t'=t\\3-t'=t\end{cases}$ تقبل حلا واحدا هو: $(t,t')=(2,1)$

من أجل: $(t,t')=(2,1)$ نجد: $(x,y,z)=(2,2,3)$

إذن: المستقيمان (Δ)، (Δ') متقاطعان في النقطة $A(2,2,3)$.

52: تبيين أن (Δ)، (Δ') ليسا من نفس المستوي.

شعاعا توجيه (Δ)، (Δ') هما $\vec{u}(0,1,1)$ ، $\vec{v}(1,2,-1)$ على الترتيب.

بما أن: $(1)(1)\neq(2)(0)$

فإن: الشعاعين $\vec{u}$، $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا

وهذا يعني أن: المستقيمين (Δ)، (Δ') غير متوازيين.

الجملة: $\begin{cases}3+t'=2\\3-t'=t\end{cases}$ تقبل حلا واحدا هو: $(t,t')=(4,-1)$

من أجل: $t=4$ نجد: $(x,y,z)=(2,7,4)$

من أجل: $t'=-1$ نجد: $(x,y,z)=(2,-1,4)$

بما أن: $(2,7,4)\neq(2,-1,4)$

فإن: المستقيمين (Δ)، (Δ') لا ينتميان إلى نفس المستوي.

53: إثبات أن المستقيمين (Δ)، (Δ') متوازيان ومختلفان.

- النقطتان $A(0,2,7)$ ، $B(3,3,5)$ تنتميان إلى المستقيم (Δ)

ومنه: شعاع توجيه للمستقيم (Δ) هو: $\overrightarrow{AB}(3,1,-2)$.

- النقطتان $C(0.75,2,1)$، $D(-2.25,1,3)$ تنتميان إلى المستقيم (Δ')

ومنه: شعاع توجيه للمستقيم (Δ')هو: $\overrightarrow{DC}(3,1,-2)$.

واضح أن: الشعاعين $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{DC}$ مرتبطان خطيا (1)

A تنتمي إلى المستقيم (Δ) ولا تنتمي إلى المستقيم (Δ') (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المستقيمين (Δ)، (Δ') متوازيان ومختلفان.

54: تعيين إحداثيات نقطة تقاطع (Δ) والمستوي (OIK).

نفرض $A(x,y,z)$ نقطة تقاطع (Δ) مع المستوي (OIK)

فتكون: $x=0$ ومنه: $0=4-t$ أي: $t=4$

إذن: إحداثيات نقطة التقاطع هي: $(0,6,9)$

55: تعيين نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (P).

لدينا: $\vec{u}(1,-3,1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

$\vec{v}(-2,1,-1)$ شعاع ناظم للمستوي (P)

لدينا: $\vec{u}.\vec{v}=-6\neq 0$ ومنه: الشعاعين $\vec{u}$، $\vec{v}$ غير متعامدين.

وهذا يعني أن: المستقيم (Δ) يقطع المستوي (P) في نقطة.

لدينا: $-2x+y-z+4=0$ ومنه: $-2(t)+(4-3t)-(2+t)+4=0$

أي: $-6t+6=0$ معناه: $t=1$

إذن: إحداثيات نقطة التقاطع هي: $(1,1,3)$

56: دراسة الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (P).

لدينا: $2x+y-z+3=0$ ومنه: شعاع ناظم (P) هو $\vec{v}\,(2,1,-1)$

لدينا: $\vec{u}.\vec{v}=0$ ومنه: الشعاع $\vec{u}$ يعامد $\vec{v}$.

وهذا يعني أن: المستقيم (Δ) لا يقطع المستوي (P).

بما أن: النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ) ولا تنتمي إلى المستوي (P)

فإن: المستقيم (Δ) يوازي المستوي (P).

57: تبيين أن المستويين (P)،(P') متقاطعان.

الشعاعان $\vec{u}\,(2,1,-1)$ ، $\vec{v}\,(1,-3,2)$ ناظميان للمستويين (P)،(P') على الترتيب.

بما أن: $(1)(1)\neq(-3)(2)$ فإن: الشعاعين $\vec{u}$،$\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا

وهذا يعني أن: المستويين (P)،(P') متقاطعان وفق مستقيم وليكن (Δ)

معرف بجملة المعادلتين: $\begin{cases}2x+y-z+1=0\\x-3y+2z-4=0\end{cases}$

تعيين شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\1 & -3 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix}2 & 1\\1 & -3\end{matrix}$$

$$-1 \quad -5 \quad -7$$

ومنه: مركبات شعاع توجيه المستقيم (Δ) هي: $(-1,-5,-7)$

58: تعيين قيمة الوسيط m حيث يكون:

أ) المستويان (P_1)،(P_2) متوازيين.

الشعاعان $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}m+1\\m-2\\3m-2\end{pmatrix}$ ناظميان للمستويين (P_1)،(P_2) على الترتيب.

يتوازى المستويان (P_1)،(P_2) إذا كان الشعاعان $\vec{u}$،$\vec{v}$ مرتبطين خطيا.

أي: $\begin{cases}(m+1)(-1)=2(m-2)\\(m-2)(1)=(3m-2)(-1)\end{cases}$

معناه: $\begin{cases}-m-1=2m-4\\m-2=-3m+2\end{cases}$ نجد: $m=1$.

ب) المستويان (P_1)،(P_2) متعامدين.

يتعامد المستويان (P_1)،(P_2) إذا كان: $\vec{u}.\vec{v}=0$

أي: $(m+1)(2)+(m-2)(-1)+(3m-2)(1)=0$

معناه: $4m+2=0$ إذن: $m=-0.5$.

59: تعيين مجموعة حلول الجملة.

لدينا: $\begin{cases}2x-3y-z=5\\-4x+6y+2z=1\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}4x-6y-2z=10\\-4x+6y+2z=1\end{cases}$

بالجمع نجد: $0=11$ ومنه: الجملة لا تقبل أي حل.

التفسير الهندسي: المستويان المعرفان بالمعادلتين:

$2x-3y-z=5$ ، $-4x+6y+2z=1$ متوازيان ومختلفان.

60: 1) تبيين أن المستويين (P_1)،(P_2) متقاطعان.

لدينا: شعاع ناظم (P_1) هو: $\vec{u_1}(1,3,1)$

شعاع ناظم (P_2) هو: $\vec{u_2}(-3,5,-1)$.

بما أن: $(-3)(3)\neq(1)(5)$ فإن: الشعاعين $\vec{u}$،$\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا.

وهذا يعني أن: المستويين (P_1)،(P_2) متقاطعان وفق مستقيم وليكن (Δ).

تعيين مركبات شعاع توجيه المستقيم (Δ).

المستقيم (Δ) معرف بجملة المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases}x+3y+z-1=0\\-3x+5y-z-2=0\end{cases}$$

النقطتان $A(-1.5\,,0\,,2.5)$ ، $B(2.5\,,1\,,-4.5)$ تنتميان إلى المستقيم (Δ)

ومنه: شعاع توجيه (Δ) هو: $\overrightarrow{AB}(4\,,1\,,-7)$

2) دراسة الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (P_3)

شعاع ناظم المستوي (P_3) هو: $\overrightarrow{u_3}(-1\,,25\,,3)$.

لدينا: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_3}=(4)(-1)+(1)(25)+(3)(-7)=0$

ومنه: (Δ) يوازي المستوي (P_3) أو (Δ) محتوى في المستوي (P_3).

بما أن: النقطة $A(-1.5\,,0\,,2.5)$ تنتمي إلى كل من (P_3) و (Δ).

فإن: المستقيم (Δ) محتوى في المستوي (P_3).

3) استنتاج مجموعة حلول الجملة

حسب نتيجتي السؤالين الأول والثاني نستنتج أن الجملة تقبل عددا غير منته من الحلول وهي إحداثيات نقاط (Δ) تقاطع المستويين (P_1)، (P_2).

التفسير الهندسي:

الجملة: $\begin{cases}x+3y+z=1\\-3x+5y-z=2\\-x+25y+3z=9\end{cases}$ تكافئ: $\begin{cases}x+3y+z-1=0\\-3x+5y-z-2=0\\-x+25y+3z-9=0\end{cases}$

بما أن: حلول الجملة هي إحداثيات نقاط المستقيم (Δ).

فإن: المستويات (P_1)، (P_2)، (P_3) متقاطعة وفق المستقيم (Δ).

61: 1: كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ).

المستقيم (Δ) هو مجموعة النقط $M(x\,,y\,,z)$ حيث:

$\overrightarrow{AM}=t\,\vec{u}$ مع: t عدد حقيقي.

ومنه: $\begin{cases}x=1-2t\\y=-1+t\\z=2+3t\end{cases}$

2: أ) تعيين مركبات شعاع توجيه المستقيم (D).

نضع: $x=k$ فنجد: $\begin{cases}x=k\\4k+y=0\\2k-z=0\end{cases}$ أي: $\begin{cases}x=k\\y=-4k\\z=2k\end{cases}$

إذن: مركبات شعاع توجيه المستقيم (D) هي: $(1\,,-4\,,2)$.

ب) تبيين أن (Δ)، (D) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

موجها (Δ)، (D) غير مرتبطين خطيا لأن: $(4)(-2)\neq(1)(1)$

الجملة: $\begin{cases}k=1-2t\\-4k=-1+t\\2k=2+3t\end{cases}$ لا تقبل أي حل.

إذن: المستقيمان (Δ)، (D) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

3: أ) كتابة معادلة للمستوي (P).

المستوي (P) هو مجموعة النقط $M(x\,,y\,,z)$ حيث: $\overrightarrow{OM}.\vec{u}=0$

ومنه: معادلة للمستوي (P) $-2x+y+3z=0$

ب) إثبات أن المستقيم (D) محتوى في المستوي (P).

لتكن $M(x\,,y\,,z)$ نقطة من المستقيم (D)

ومنه: $x=k$ ، $y=-4k$ ، $z=2k$

لدينا: $-2(k)+(-4k)+3(2k)=0$

ومنه: النقطة M تنتمي إلى المستوي (P)

إذن: المستقيم (D) محتوى في المستوي (P).

62: بكالوريا المغرب دورة 2008 شعبة العلوم التجريبية.

1: تبيين أن مركز (S) هو $w(1,0,2)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

لدينا: $x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$

ومنه: $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=3$

إذن: مركز سطح الكرة (S) هو $w(1,0,2)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$.

التحقق أن النقطة A تنتمي إلى سطح الكرة (S).

لدينا: $(0-1)^2+(-1)^2+(1-2)^2=3$

ومنه: النقطة A تنتمي إلى سطح الكرة (S).

2: تبيين أن معادلة المستوي (OAB) هي: $x+y+z=0$.

بما أن: احداثيات النقاط B ، A ، O تحقق المعادلة: $x+y+z=0$

فإن: معادلة المستوي (OAB) هي: $x+y+z=0$.

3: إثبات أن (OAB) مماس لسطح الكرة (S) في A.

نفرض d بعد المركز w عن المستوي (OAB) فيكون:

$$d=\frac{|1+0+2|}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

بما أن: $d=\sqrt{3}=R$ فإن: المستوي (OAB) مماس لسطح الكرة (S).

وبما أن: النقطة A تنتمي إلى كل من سطح الكرة (S) والمستوي (OAB)

فإن: نقطة التماس هي A.

63: 1: إثبات أن المجموعة (S) سطح كرة.

لدينا: $x^2+y^2+z^2+2x-2y-2=0$

ومنه: $(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=4$

إذن: (S) سطح كرة مركزها $w(-1,1,0)$ ونصف قطرها $R=2$.

2: أ) تبيين أن (P_0) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C).

بعد المركز w عن المستوي (P_0) هو:

$$d=\frac{|3(-1)-4(0)|}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}}=\frac{3}{5}=0.6$$

بما أن: $0.6<2$ أي: $d<R$

فإن: المستوي (P_0) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة (C).

طول نصف القطر r للدائرة (C) هو: $r=\sqrt{R^2-d^2}$

أي: $r=\sqrt{4-0.36}=\frac{\sqrt{91}}{5}$.

المركز A للدائرة (C) هو نقطة تقاطع المستقيم (Δ) الذي يشمل المركز w لسطح الكرة (S) ويعامد المستوي (P_0).

المعادلات الوسيطية للمستقيم (Δ) هي:

$$\begin{cases}x=-1+t\\y=1\\z=t\end{cases}$$

مع: t عدد حقيقي.

ومنه: احداثيات المركز A هي حلول الجملة:

$$\begin{cases}x=-1+t\\y=1\\z=t\\3x-4z=0\end{cases}$$

نجد: $4t=-3+3t$ ومنه: $t=-3$.

إذن: احداثيات المركز A هي: $(-4,1,-3)$.

ب) دراسة الوضع النسبي للمستوي (P_m) والكرة (S).

بعد المركز w لسطح الكرة (S) عن المستوي (P_m) هو:

$$d=\frac{|3(-1)-4(0)+m|}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}}=\frac{|m-3|}{5}$$

لندرس إشارة الفرق: $d - R = \frac{|m-3|}{5} - 2$

المعادلة: $\frac{|m-3|}{5} - 2 = 0$ تكافئ: $|m-3| = 10$

ومنه: $m-3=10$ أو $m-3=-10$

إذن: $m=13$ أو $m=-7$

m	$-\infty$		-7		13		$+\infty$
$d-R$		+	0	−	0	+	

من هذا الجدول نستنتج أنه إذا كان:

$-7 < m < 13$: المستوي (P_m) يقطع سطح الكرة (S) في دائرة.

$m \in \{-7, 13\}$: المستوي (P_m) مماس لسطح الكرة (S).

$m > 13$ أو $m < -7$: المستوي (P_m) لا يقطع سطح الكرة (S).

تمارين ومسائل متنوعة:

64: 1: أ) إثبات أن: C ، B ، A ليست في استقامية.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(0,1,2)$ ، $\overrightarrow{AC}(-2,1,-1)$

بما أن: $(1)(-1) \neq (2)(1)$

فإن: الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا.

معناه: النقاط C ، B ، A ليست في استقامية.

ب) التحقق أن $\vec{n}$ ناظم للمستوي (ABC).

بما أن: $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$

فإن: الشعاع $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$

إذن: الشعاع $\vec{n}$ ناظم للمستوي (ABC).

ج) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

المستوي (ABC) هو مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث: $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

أي: $3(x-1)+4(y)-2(z-2)=0$

معناه: $3x+4y-2z+1=0$.

2: أ) تبيين أن (P_1) ، (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ).

معادلة (P_1) هي: $2x+y+2z+1=0$

ومنه: الشعاع $\overrightarrow{n_1}(2,1,2)$ ناظم للمستوي (P_1).

معادلة (P_2) هي: $x-2y+6z=0$

ومنه: الشعاع $\overrightarrow{n_2}(1,-2,6)$ ناظم للمستوي (P_2).

بما أن: $(2)(-2) \neq (1)(6)$ فإن: $\overrightarrow{n_1}$ ، $\overrightarrow{n_2}$ غير مرتبطين خطيا.

وهذا يعني أن: المستويين (P_1) ، (P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ).

ب) كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ).

المستقيم (Δ) معرف بجملة المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} 2x+y+2z+1=0 \\ x-2y+6z=0 \end{cases}$$

نضع: $z=t$ فنجد:

$$\begin{cases} 2x+y=-2t-1 \\ x-2y=-6t \end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases} x=-0.4-2t \\ y=-0.2+2t \\ z=t \end{cases}$$

ج) دراسة الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمستوي (ABC).

الشعاع $\vec{u}(-2,2,1)$ موجه للمستقيم (Δ).

بما أن: $\vec{n}.\vec{u} = 0$ فإن: الشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{n}$ متعامدان.

إذن: المستقيم (Δ) يوازي المستوي (ABC).

3: أ) التحقق من وجود النقطة G.

لدينا: $1+2+t=3+t\neq 0$ ومنه: النقطة G موجودة.

ب) تعيين احداثيات النقطة I.

لدينا: $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

بما أن: $1+2=3\neq 0$ فإن: I مرجح للجملة $\{(A,1),(B,2)\}$

ومنه: احداثيات النقطة I هي: $\left(-\frac{2}{3},1,\frac{5}{3}\right)$

ج) كتابة الشعاع $\overrightarrow{IG}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{IC}$.

لدينا: G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,2),(C,t)\}$

ومنه: G مرجح الجملة $\{(I,3),(C,t)\}$

معناه: $3\overrightarrow{GI}+t\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ أي: $3\overrightarrow{GI}+t\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}\right)=\vec{0}$

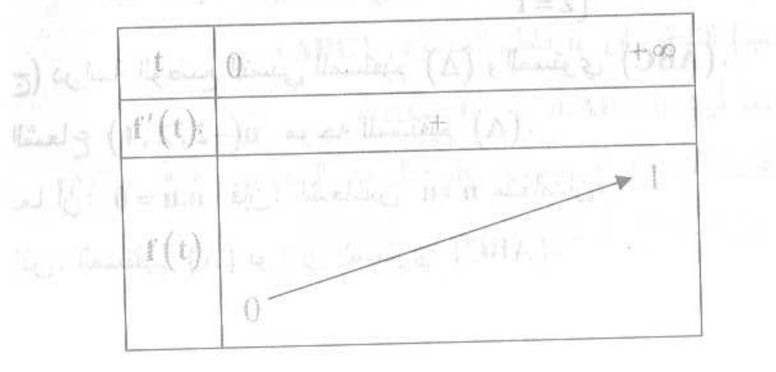
نجد: $(3+t)\overrightarrow{GI}+t\,\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ إذن: $\overrightarrow{IG}=\frac{t}{3+t}\overrightarrow{IC}$.

د) إثبات أن مجموعة النقط G هي مجموعة نقاط $[IC]$ ما عدا C.

نضع: $f(t)=\frac{t}{3+t}$ مع: $t\geq 0$.

الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$ حيث: $f'(t)=\frac{3}{(3+t)^2}$

جدول التغيرات:



t	$0 \qquad +\infty$
$f'(t)$	$+$
$f(t)$	$0 \nearrow 1$

بما أن: $\overrightarrow{IG}=\frac{t}{3+t}\overrightarrow{IC}$ و $0\leq\frac{t}{3+t}<1$

فإن: مجموعة النقط G عندما يتغير t في المجال $[0,+\infty[$ هي مجموعة نقاط القطعة $[IC]$ ما عدا النقطة C.

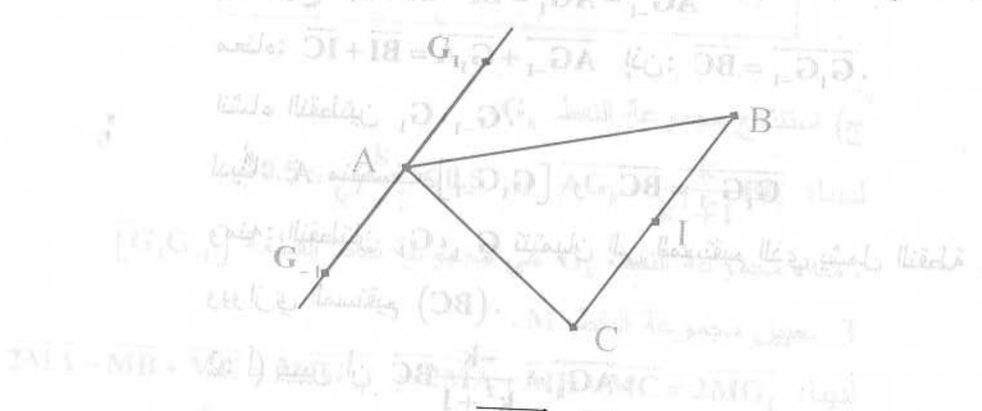
ه) تحديد قيمة العدد t.

تكون النقطة G منتصف $[IC]$ إذا كان: $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$

بالمطابقة مع العلاقة: $\overrightarrow{IG}=\frac{t}{3+t}\overrightarrow{IC}$

نجد: $\frac{t}{3+t}=\frac{1}{2}$ ومنه: $t=3$.

65: 1: أ) تمثيل النقاط A، B، C، I.



ب) تبيين أن $\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{CI}$ و $\overrightarrow{AG_{-1}}=\overrightarrow{BI}$.

لدينا: G_1 مرجح الجملة: $\{(A,2),(B,1),(C,-1)\}$

ومنه: $2\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{G_1B}-\overrightarrow{G_1C}=\vec{0}$

أي: $2\overrightarrow{G_1A}+\left(\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

معناه: $2\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

وبالتالي: $\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)$ إذن: $\overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CI}$.

لدينا أيضا: G_{-1} مرجح الجملة: $\{(A,2),(B,-1),(C,1)\}$

ومنه: $2\overrightarrow{G_{-1}A}-\overrightarrow{G_{-1}B}+\overrightarrow{G_{-1}C}=\vec{0}$

بنفس الطريقة نجد: $\overrightarrow{AG_{-1}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BI}$.

ج) استنتاج أن A منتصف $[G_1G_{-1}]$.

لدينا: $\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{CI}$ ، $\overrightarrow{AG_{-1}}=\overrightarrow{BI}$

بالجمع نجد: $\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{AG_{-1}}=\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$

وهذا يعني أن: A منتصف $[G_1G_{-1}]$.

استنتاج أن: $\overrightarrow{G_1G_{-1}}=\overrightarrow{BC}$

من العلاقتين: $\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{CI}$ ، $\overrightarrow{AG_{-1}}=\overrightarrow{BI}$

وبالطرح نجد: $\overrightarrow{AG_{-1}}-\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{CI}$

معناه: $\overrightarrow{AG_{-1}}+\overrightarrow{G_1A}=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}$ إذن: $\overrightarrow{G_1G_{-1}}=\overrightarrow{BC}$.

انشاء النقطتين G_1، G_{-1} .

لدينا: A منتصف $[G_1G_{-1}]$ و $\overrightarrow{G_1G_{-1}}=\overrightarrow{BC}$

ومنه: النقطتان G_1، G_{-1} تنتميان إلى المستقيم الذي يشمل النقطة A ويوازي المستقيم (BC).

2: أ) تبيين أن $\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$.

لدينا: $(k^2+1)\overrightarrow{G_kA}+k\,\overrightarrow{G_kB}-k\,\overrightarrow{G_kC}=\vec{0}$ ومنه:

$$(k^2+1)\overrightarrow{G_kA}+k\left(\overrightarrow{G_kA}+\overrightarrow{AB}\right)-k\left(\overrightarrow{G_kA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$$

معناه: $(k^2+1)\overrightarrow{G_kA}+k\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0}$

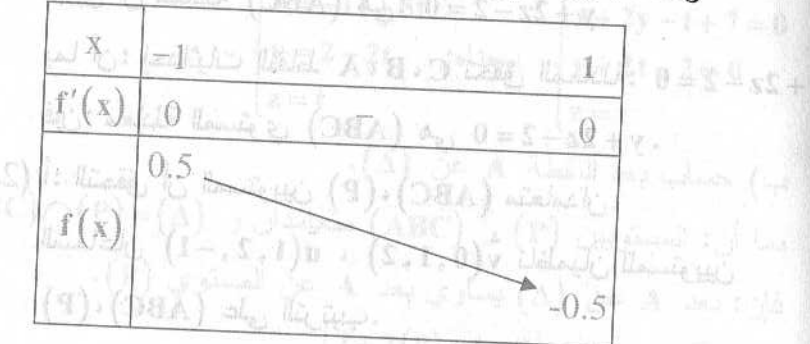
إذن: $\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$.

ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة f .

الدالة f حيث: $f(x)=\frac{-x}{x^2+1}$ تقبل الاشتقاق على المجال $[-1,1]$

حيث: $f'(x)=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

ومنه: جدول تغيرات الدالة f هو:



x	-1		1
f'(x)	0		0
f(x)	0.5	↘	-0.5

ج) استنتاج مجموعة النقط G_k .

لدينا: $\overrightarrow{AG_k}=\frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$ و $-0.5\le\frac{-k}{k^2+1}\le0.5$

ومنه: مجموعة النقط G_k هي مجموعة نقاط القطعة $[G_1G_{-1}]$.

3: تعيين مجموعة النقط M .

لدينا: $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG_1}$ و $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG_{-1}}$

ومنه: $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

تكافئ: $2MG_1=2MG_{-1}$ أي: $MG_1=MG_{-1}$

إذن: مجموعة النقط M هي مجموعة نقط المستوي المحوري للقطعة $[G_1G_{-1}]$ أي: المستوي الذي يشمل النقطة A ويعامد (BC).

1) التحقق أن النقاط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(1,2,-1)$ ، $\overrightarrow{CB}(4,4,-2)$

بما أن: $(1)(4)\neq(2)(4)$ فإن: $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CB}$ غير مرتبطين خطيا.

وهذا يعني أن: النقاط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

تبيين أن معادلة (ABC) هي: $y+2z-2=0$.

بما أن: إحداثيات النقاط A ، B ، C تحقق المعادلة: $y+2z-2=0$

فإن: معادلة المستوي (ABC) هي $y+2z-2=0$.

2) أ: التحقق أن المستويين (P) ، (ABC) متعامدان.

الشعاعان $\vec{u}(1,2,-1)$ ، $\vec{v}(0,1,2)$ ناظميان للمستويين (P) ، (ABC) على الترتيب.

لدينا: $\vec{u}\cdot\vec{v}=(0)(1)+(1)(2)+(2)(-1)=0$

ومنه: $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ متعامدان.

إذن: المستويان (P) ، (ABC) متعامدان.

تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ):

المستقيم (Δ) معرف بجملة المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} x+2y-z+7=0 \\ y+2z-2=0 \end{cases}$$

النقطتان: $C(-1,-2,2)$ ، $D(-6,0,1)$ تنتميان إلى (Δ).

ومنه: شعاع توجيه (Δ) هو: $\overrightarrow{DC}(5,-2,1)$.

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستقيم (Δ) إذا وجد عدد حقيقي t حيث: $\overrightarrow{CM}=t\vec{u}$

معناه: $\begin{cases} x+1=5t \\ y+2=-2t \\ z-2=t \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x=-1+5t \\ y=-2-2t \\ z=2+t \end{cases}$

طريقة أخرى:

لدينا: $\begin{cases} x+2y-z+7=0 \\ y+2z-2=0 \end{cases}$ ، بوضع $z=t$ نجد:

$\begin{cases} x+2y-t+7=0 \\ y+2t-2=0 \\ z=t \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} x=-11+5t \\ y=2-2t \\ z=t \end{cases}$

ب) حساب بعد النقطة A عن (Δ).

بما أن: المستويين (P) و (ABC) متعامدان و $(ABC)\cap(P)=(\Delta)$

فإن: بعد A عن (Δ) يساوي بعد A عن المستوي (P).

أي: $d=\dfrac{|2+2(0)-1+7|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{8}{\sqrt{6}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

3) تعيين قيمة العدد α:

لدينا: $\overrightarrow{GA}+\alpha\overrightarrow{GB}+\beta\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

نفرض (x,y,z) إحداثيات النقطة G فيكون:

$x=\dfrac{2+3\alpha-\beta}{1+\alpha+\beta}$ ، $y=\dfrac{2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta}$ ، $z=\dfrac{1+2\beta}{1+\alpha+\beta}$

تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ) إذا حققت إحداثياتها معادلة المستوي (P) لأن: المستقيم (Δ) محتوى في المستوي (P).

ومنه: $\dfrac{2+3\alpha-\beta}{1+\alpha+\beta}+\dfrac{4\alpha-4\beta}{1+\alpha+\beta}-\dfrac{1+2\beta}{1+\alpha+\beta}+7=0$

نضرب الطرفين في العدد: $1+\alpha+\beta$ فنجد:

$$2+3\alpha-\beta+4\alpha-4\beta-(1+2\beta)+7(1+\alpha+\beta)=0$$

أي: $14\alpha+8=0$ إذن: $\alpha=\dfrac{-4}{7}$

1: كتابة معادلة لسطح الكرة (S).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من سطح الكرة (S) إذا كان: $CM^2 = AC^2$

لدينا: $AC^2 = (1-0)^2 + (0-2)^2 + (-1-1)^2 = 9$

إذن: معادلة سطح الكرة (S) هي: $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$

2: أ) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: المستقيم (Δ) يعامد المستوي (P)

فإن: شعاع ناظم (P) هو شعاع توجيه المستقيم (Δ) أي: $\vec{u}(-1,2,2)$.

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (P) إذا كان: $\overrightarrow{CM}.\vec{u} = 0$

أي: $(-1)(x-1)+2(y)+2(z+1)=0$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $-x+2y+2z+3=0$

ب) حساب بعد النقطة C عن (Δ).

نفرض H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (Δ) فيكون:

$H \in (\Delta)$ و $\overrightarrow{CH}.\vec{u} = 0$

أي: $-(-1-t)+2(1+2t)+2(-3+2t)+3=0$

ومنه: $t=0$ إذن: إحداثيات H هي: $(-1,1,-3)$

لدينا: $CH^2 = (-1-1)^2 + (1-0)^2 + (-3+1)^2 = 9$

إذن: بعد النقطة C عن المستقيم (Δ) هو: $CH = 3$

ج) استنتاج الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والكرة (S).

المستقيم (Δ) مماس لسطح الكرة (S) لأن بعد مركزها C عن المستقيم (Δ) يساوي طول نصف قطرها.

1) إثبات أن النقاط A، B، C تعين مستويا.

تعين النقاط A، B، C مستويا إذا كانت ليست على استقامة واحدة أي:

إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(2,0,-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(0,1,1)$

بما أن: $(1)(-1)(1) \neq (0)(1)$

فإن: الشعاعين $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

إذن: النقاط A، B، C تعين مستويا.

إعطاء معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (ABC) إذا وجد عددان

حقيقيان α، β بحيث: $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AC}$

أي إذا كان: محدد $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ معدوما

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-2 & 0 & 1 \\ z-2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ومنه: $(1)(x-1)-(y-2)(2)+(z-2)(2)=0$

إذن: معادلة المستوي (ABC) هي: $x-2y+2z-1=0$

2) إثبات أن المستويين (P_1)،(P_2) متقاطعان.

شعاع ناظم المستوي (P_1) هو: $\overrightarrow{u_1}(1,-2,2)$

وشعاع ناظم المستوي (P_2) هو: $\overrightarrow{u_2}(1,-3,2)$

بما أن: $(1)(-3) \neq (-2)(1)$ فإن: الشعاعين $\vec{u_1}$، $\vec{u_2}$ غير مرتبطين خطيا.

وهذا يعني أن: المستويين (P_1)،(P_2) متقاطعان وفق مستقيم (Δ).

3) تبيين أن النقطة C تنتمي إلى (Δ).

بما أن: إحداثيات النقطة C تحقق معادلتي المستويين (P_1)،(P_2)

فإن: النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ).

4) تبيين أن $\vec{u}$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

يكون الشعاع $\vec{u}$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) إذا وفقط إذا كان:

الشعاع $\vec{u}$ عمودياً على كل من الشعاعين $\vec{u_1}$ ، $\vec{u_2}$.

لدينا: $\vec{u}.\vec{u_1}=0$ و $\vec{u}.\vec{u_2}=0$

ومنه: $\vec{u}$ عمودي على كل من الشعاعين $\vec{u_1}$ ، $\vec{u_2}$.

إذن: $\vec{u}(2,0,-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

5) استنتاج التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستقيم (Δ) إذا وجد عدد حقيقي t حيث: $\overrightarrow{CM}=t\vec{u}$ أي:

$$\begin{cases} x-1=2t \\ y-3=0 \\ z-3=-t \end{cases} \quad \text{معناه:} \quad \begin{cases} x=1+2t \\ y=3 \\ z=3-t \end{cases}$$

6) إيجاد قيمة الوسيط t:

يتعامد الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ ، $\vec{u}$ إذا كان: $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

أي: $(2)(2t)+(0)(1)+(-1)(1-t)=0$ إذن: $t=0.2$.

استنتاج المسافة بين A و (Δ):

من أجل: $t=0.2$ نجد: $(x,y,z)=(1.4,3,2.8)$ وهي إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (Δ)

ومنه: بعد النقطة A عن (Δ) هو الطول AH حيث:

$$AH=\sqrt{(1.4-1)^2+(3-2)^2+(2.8-2)^2}=\sqrt{\frac{45}{25}}=\sqrt{1.6}$$

69: 1: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (P) إذا كان: $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

أي: $-2(x-1)+(y+2)+5(z-1)=0$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $-2x+y+5z-1=0$

2: تبيين أن المستويين (P)،(P') متعامدان.

الشعاع $\vec{u'}(1,2,0)$ ناظم للمستوي (P').

لدينا: $\vec{u}.\vec{u'}=(1)(-2)+(2)(1)+(0)(5)=0$ ومنه: $\vec{u}$ ، $\vec{u'}$ متعامدان.

إذن: المستوي (P) يعامد المستوي (P').

3: تبيين أن النقطة B تنتمي إلى (Δ).

بما أن: النقطة B تنتمي إلى كل من المستويين (P)،(P') فإنها تنتمي إلى المستقيم (Δ).

وبما أن: الشعاع $\vec{v}$ عمودي على كل من الشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{u'}$ فإن: الشعاع $\vec{v}(2,-1,1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

4: حساب بعد النقطة C عن كل من (P)،(P').

$$d_1=\frac{|-2(5)+(-2)+5(-1)-1|}{\sqrt{(-2)^2+(1)^2+(5)^2}}=\frac{18}{\sqrt{30}}=\frac{3\sqrt{30}}{5}$$

$$d_2=\frac{|5+2(-2)-7|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

استنتاج بعد النقطة C عن (Δ):

لتكن: H_1 المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P).

H_2 المسقط العمودي للنقطة H_1 على المستقيم (Δ).

المثلث CH_1H_2 قائم في H_1 ومنه: $CH_2^2=CH_1^2+H_1H_2^2$

لدينا: $CH_1^2=\left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2=10.8$ ، $H_1H_2^2=\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2=7.2$

ومنه: $CH_2^2=18$ إذن: $CH_2=3\sqrt{2}$

إذن: بعد النقطة C عن المستقيم (Δ) هو: $3\sqrt{2}$.

5: أ) التحقق أن M تنتمي إلى (Δ).

لدينا: $\overrightarrow{BM}(2+2t,-t-1,t+1)$ و $\vec{v}(2,-1,1)$

بما أن: الشعاعين $\overrightarrow{BM}$ ، $\vec{v}$ مرتبطان خطيا وذلك لأن:

$(2)(-t-1)=(-1)(2+2t)$ و $(-1)(1+t)=(1)(-t-1)$

فإن: النقطة M تنتمي إلى المستقيم (Δ).

ب: تبيين أن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى.

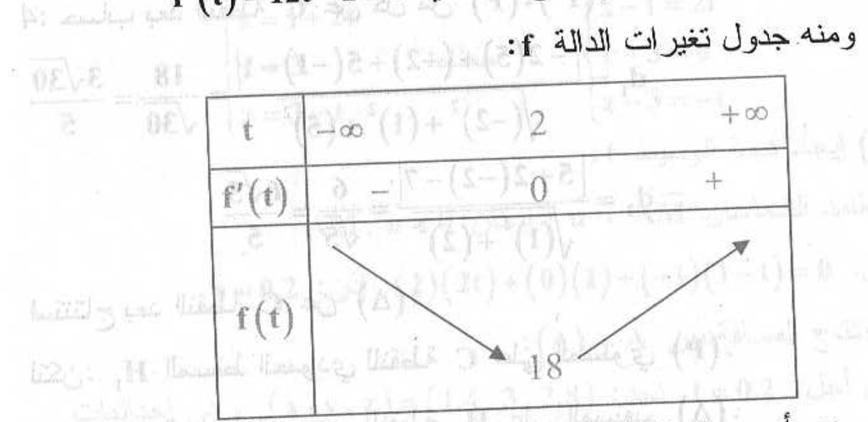
لدينا: $f(t)=CM^2$

ومنه: $f(t)=(1+2t-5)^2+(3-t+2)^2+(t+1)^2$

بعد النشر والتبسيط نجد: $f(t)=6t^2-24t+42$

الدالة f تقبل الاشتقاق على IR حيث: $f'(t)=12t-24$

ومنه جدول تغيرات الدالة f:



t	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	18	↗	

ومنه: أصغر قيمة تبلغها الدالة f هي $f(2)=18$.

استنتاج بعد النقطة C عن المستقيم (Δ).

بعد النقطة C عن المستقيم (Δ) هو: $CM=\sqrt{f(2)}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

70: 1: أ) إثبات أن النقاط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(0,1,1)$ ، $\overrightarrow{AC}(2,-2,2)$

بما أن: $(0)(-2)\neq(1)(2)$

فإن: الشعاعين: $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

وهذا يعني أن: النقاط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

ب) تبيين أن معادلة المستوي (ABC) هي: $2x+y-z-3=0$

بما أن: إحداثيات النقاط A ، B ، C تحقق المعادلة: $2x+y-z-3=0$

فإن: معادلة المستوي (ABC) هي: $2x+y-z-3=0$

2: إثبات أن المستويين (P) ، (P') متقاطعان.

شعاع ناظم المستوي (P) هو $\vec{u}(1,2,-1)$.

وشعاع ناظم المستوي (P') هو $\vec{v}(2,3,-2)$.

بما أن: $(1)(3)\neq(2)(2)$ فإن: الشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً

وهذا يعني أن: المستويين (P) ، (P') متقاطعان وفق مستقيم (Δ) معرف بجملة المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} x+2y-z-4=0 \\ 2x+3y-2z-5=0 \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} x=-2y+z+4 \\ 2(-2y+z+4)+3y-2z-5=0 \end{cases}$$

معناه: $\begin{cases} x=-2y+z+4 \\ -y+3=0 \end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases} x=-2+z \\ y=3 \end{cases}$

نضع: $z=t$ فنحصل على التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ):

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$$ مع: t عدد حقيقي.

3: تحديد تقاطع المستويات (ABC) ، (P) ، (P'):

لدينا: حسب نتيجة السؤال الثاني المستويان (P) ، (P') متقاطعان وفق المستقيم (Δ) الذي شعاع توجيه له $\vec{w}(1,0,1)$.

لدينا أيضاً: $\vec{m}(2,1,-1)$ شعاع ناظم للمستوي (ABC).

بما أن: $\vec{w}.\vec{m}=1\neq0$ فإن: الشعاعين $\vec{w}$ ، $\vec{m}$ غير متعامدين

وهذا يعني أن: المستقيم (Δ) يقطع المستوي (ABC) في نقطة ولتكن D إحداثياتها (x,y,z) تحقق الجملة:

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \\ 2x+y-z-3=0 \end{cases}$$ أي: $$\begin{cases} x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \\ 2(-2+t)+3-t-3=0 \end{cases}$$

نجد: $$\begin{cases} x=-2+4 \\ y=3 \\ z=4 \\ t=4 \end{cases}$$ إذن: $$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=4 \end{cases}$$

إذن: المستويات (ABC)، (P)، (P') تتقاطع في النقطة $D(2,3,4)$

4: حساب بعد النقطة A عن (Δ).

لتكن $H(x,y,z)$ المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ)

ومنه: $H\in(\Delta)$ و $\overrightarrow{AH}.\vec{w}=0$.

$H\in(\Delta)$ معناه: $$\begin{cases} x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$$

$\overrightarrow{AH}.\vec{w}=0$ معناه: $(-3+t)(1)+(0)(3-1)+(1)(t-0)=0$

معناه: $2t-3=0$ ومنه: $t=1.5$.

إذن: إحداثيات النقطة H هي: $(-0.5\,,3\,,1.5)$

ومنه: بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) هو AH حيث:

$$AH=\sqrt{(1+0.5)^2+(1-3)^2+(0-1.5)^2}=\sqrt{8.5}$$

71: 1: تبيين أن النقاط A، B، C تعين مستوياً.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-1,3,3)$ ، $\overrightarrow{AC}(-2,4,4)$

بما أن: $(-1)(4)\neq(3)(-2)$ فإن: $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطتين خطياً.

معناه: النقاط A، B، C تعين مستوياً.

2: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (ABC) إذا وجد عددان حقيقيان α، β بحيث: $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ أي:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -1 & -2 \\ y+3 & 3 & 4 \\ z+1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=0$$

معناه: $(x-2)(0)-(y+3)(2)+(z+1)(2)=0$

إذن: معادلة المستوي (ABC) هي: $-y+z-2=0$

3: أ) تبيين أن المجموعة (S) سطح كرة.

لدينا: $\Delta=(-2\theta)^2+(-2\sin\theta)^2+(2)^2-4(\theta^2-\cos^2\theta)$

ومنه: $\Delta=4\theta^2+4\sin^2\theta+4-4\theta^2+4\cos^2\theta$

أي: $\Delta=4+4(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=4+4(1)=8$

بما أن: $\Delta>0$ فإن: (S) سطح كرة مركزها $w(\theta,\sin\theta,-1)$

وطول نصف قطرها $R=\frac{\sqrt{\Delta}}{2}=\sqrt{2}$.

ب) دراسة حسب قيم θ عدد نقاط تقاطع (ABC) و (S).

بعد المركز w عن المستوي (ABC) هو d حيث:

$$d=\frac{|-(\sin\theta)+(-1)-2|}{\sqrt{(0)^2+(-1)^2+(1)^2}}=\frac{|3+\sin\theta|}{\sqrt{2}}=\frac{3+\sin\theta}{\sqrt{2}}$$

لندرس إشارة الفرق $d-R$:

$$d-R=\frac{3+\sin\theta}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\frac{1+\sin\theta}{\sqrt{2}}$$

θ	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		π
$d-R$		+	0	+	

من هذا الجدول نستنتج أنه:

إذا كان: $\theta=-\frac{\pi}{2}$ عدد نقاط التقاطع هو 1.

معناه: المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S).

إذا كان: $-\frac{\pi}{2}<\theta\le\pi$ أو $-\pi\le\theta<-\frac{\pi}{2}$ عدد نقاط التقاطع هو 0.

ج) تعيين إحداثيات نقطة التماس H.

من أجل: $\theta=-\frac{\pi}{2}$ نجد: $w\left(-\frac{\pi}{2},-1,-1\right)$

ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة w والعمودي على (ABC)

ومنه: شعاع توجيه المستقيم (Δ) هو $\vec{u}(0,-1,1)$

إذن: التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) هو:

$$\begin{cases} x=-\frac{\pi}{2} \\ y=-1-t \\ z=-1+t \end{cases}$$ مع: t عدد حقيقي.

ومنه إحداثيات نقطة التماس H هي حلول الجملة:

$$\begin{cases} x=-\frac{\pi}{2} \\ y=-1-t \\ z=-1+t \\ -y+z-2=0 \end{cases}$$ أي: $$\begin{cases} x=-\frac{\pi}{2} \\ y=-1-t \\ z=-1+t \\ -(-1-t)+(-1+t)-2=0 \end{cases}$$

معناه: $$\begin{cases} x=-\frac{\pi}{2} \\ y=-1-t \\ z=-1+t \\ 2t-2=0 \end{cases}$$ ومنه: $$\begin{cases} x=-\frac{\pi}{2} \\ y=-2 \\ z=0 \\ t=1 \end{cases}$$

إذن: إحداثيات نقطة التماس H هي $\left(-\frac{\pi}{2},-2,0\right)$.

72: 1) برهان أن المثلث ABC قائم في A.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(3,3,3)$ ، $\overrightarrow{AC}(3,0,-3)$

ومنه: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ إذن: المثلث ABC قائم في A.

2) تبيين أن المستقيم (AD) عمودي على (ABC).

لدينا: $\overrightarrow{AD}(-3,6,-3)$ ومنه: $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=0$

وهذا يعني أن: المستقيم (AD) عمودي على كل من (AB) و (AC).

إذن: المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

3) حساب الحجم V لرباعي الوجوه $ABCD$.

حجم رباعي الوجوه $ABCD$ يعطى بالعلاقة:

$V=\frac{1}{3}\times S\times AD$ حيث: S مساحة المثلث ABC.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(3,3,3)$ ، $\overrightarrow{AC}(3,0,-3)$ ، $\overrightarrow{AD}(-3,6,-3)$

ومنه: $AB=3\sqrt{3}$ ، $AC=3\sqrt{2}$ ، $AD=3\sqrt{6}$

إذن: $V=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}\times3\sqrt{2}}{2}\times3\sqrt{6}=27$

4) تعيين قيساً للزاوية $\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$.

نفرض θ قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$ فيكون:

$$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=DB\times DC\times\cos\theta$$

لدينا: $\overrightarrow{DB}(6,-3,6)$ ، $\overrightarrow{DC}(6,-6,0)$

ومنه: $54=9\times6\sqrt{2}\cos\theta$ أي: $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن: $\theta=\frac{\pi}{4}$ أو $\theta=-\frac{\pi}{4}$

5) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: المستقيم (AC) عمودي على المستوي (P) فإن: شعاع ناظم المستوي (P) هو: $\overrightarrow{AC}(3,0,-3)$.

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي إذا كان: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=0$

أي: $(x-3)(3)+(y+2)(0)+(z-2)(-3)=0$ نجد: $x-z-1=0$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $x-z-1=0$.

6) برهان أن المستوي (P') عمودي على (AB).

إحداثيات النقطة A تحقق المعادلة: $x+y+z-3=0$

ومنه: النقطة A تنتمي إلى المستوي (P') (1)

شعاع ناظم المستوي (P') هو: $\vec{u}(1,1,1)$ ومنه: $\overrightarrow{AB}=3\vec{u}$

ومنه: $\overrightarrow{AB}$ ، $\vec{u}$ مرتبطان خطياً (2)

من (1) و (2) نستنتج أن:

المستقيم (AB) عمودي على المستوي (P') في النقطة A.

7) تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ).

المستقيم (Δ) معرف بجملة المعادلتين التاليتين:

$$\begin{cases} x-z-1=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$$ ، نضع $z=t$ فنجد:

$$\begin{cases} x-t-1=0 \\ x+y+t-3=0 \\ z=y \end{cases}$$ أي: $$\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=t \end{cases}$$

73: بكالوريا تونس دورة 2008 شعبة العلوم التجريبية.

1: تبيين أن $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ متعامدان.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-2,0,-2)$ ، $\overrightarrow{AC}(1,-4,-1)$ ومنه: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

وهذا يعني أن: الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ متعامدان.

2: كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (ABC) إذا وجد عددان

حقيقيان α ، β بحيث: $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ أي:

$$\begin{vmatrix} x-3 & -2 & 1 \\ y-2 & 0 & -4 \\ z-6 & -2 & -1 \end{vmatrix}=0$$

ومنه: $(x-3)(-8)-(y-2)(4)+(z-6)(8)=0$

إذن: المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $2x+y-2z+4=0$

3: تعيين إحداثيات النقطة H.

نفرض (a,b,c) إحداثيات H.

بما أن: H هي المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC) فإن:

- $H\in(ABC)$ و $\overrightarrow{OH}$ ، $\vec{u}(2,1,-1)$ مرتبطان خطياً.
- $H\in(ABC)$ ومنه: $2a+b-c+4=0$ (1)
- $\overrightarrow{OH}$ ، $\vec{u}(2,1,-1)$ مرتبطان خطياً ومنه:

$a=2b$ و $c=-2b$ (2)

من (1) و (2) نجد: $2(2b)+b-(-2b)+4=0$ أي: $b=-\frac{4}{9}$

وبالتالي: $a=-\frac{8}{9}$ ، $c=\frac{8}{9}$.

إذن: إحداثيات النقطة H هي: $\left(-\frac{8}{9},-\frac{4}{9},\frac{8}{9}\right)$

حساب حجم رباعي الوجوه $OABC$.

حجم رباعي الوجوه $OABC$ هو V حيث:

$V=\frac{1}{3}\times S\times OH$ حيث: S مساحة المثلث ABC.

لدينا: $OH^2=\left(\frac{-8}{9}\right)^2+\left(\frac{-4}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^2=\frac{144}{81}$ ومنه: $OH=\frac{4}{3}$

نعلم أن: $S=\frac{1}{2}\times AB\times AC$ ومنه: $S=\frac{1}{2}(2\sqrt{2})(3\sqrt{2})=6$

إذن: حجم رباعي الوجوه $OABC$ هو: $V=\frac{1}{3}(6)\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}$.

4: أ) تبيين أن تقاطع (S) و (ABC) هو دائرة (C).

طول نصف قطر سطح الكرة (S) هو: $R=OA=7$.

بعد النقطة O عن المستوي (ABC) هو: $OH=\frac{4}{3}$

بما أن: $OH<R$ فإن: المستوي (ABC) يقطع سطح الكرة (S) في

دائرة (C) مركزها المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC)

أي: النقطة H.

ب) حساب طول نصف قطر الدائرة (C).

طول نصف قطر الدائرة (C) هو r حيث:

$r^2 = R^2 - OH^2 = \frac{425}{9}$ أي: $r = \frac{5\sqrt{17}}{3}$.

5: أ) حساب إحداثيات النقطة G.

بما أن: G مرجح الجملة: $\{(O,3)،(A,1)،(B,1)،(C,1)\}$

فإن: $3\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

معناه: $6\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ أي: $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$

نفرض (x,y,z) إحداثيات النقطة G فيكون:

$x=\frac{3+1+4}{6}=\frac{4}{3}$ ، $y=\frac{2+2-2}{6}=\frac{1}{3}$ ، $z=\frac{6+4+5}{6}=\frac{5}{2}$

- بعد النقطة G عن المستوي (ABC) هو d حيث:

$$d=\frac{\left|2\left(\frac{4}{3}\right)+\frac{1}{3}-2\left(\frac{5}{2}\right)+4\right|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}}=\frac{2}{3}$$

ب) تبيين أن (S') سطح كرة:

لدينا: $3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}+\left(3\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)$

ومنه: $3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$

المعادلة: $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4$

تكافئ: $6MG=4$ أي: $MG=\frac{2}{3}$

إذن: المجموعة (S') سطح كرة مركزها G ونصف قطرها $R=\frac{2}{3}$.

ج) استنتاج أن (ABC) مماس لسطح الكرة (S').

بما أن: $d=\frac{2}{3}=R$ فإن: المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S').

74: 1) برهان أن (P_1)، (P_2) متعامدان.

شعاع ناظم (P_1) هو $\vec{u}(0,2,1)$ وشعاع ناظم (P_2) هو: $\vec{v}(0,1,-2)$

بما أن: $\vec{u}.\vec{v}=0$ فإن: المستويين (P_1)، (P_2) متعامدان.

2) تبيين أن (P_1)، (P_2) متقاطعان وفق المستقيم (AB).

بما أن: إحداثيات النقطتين A ، B تحققان معادلتي المستويين (P_1)، (P_2)

فإنهما تنتميان إلى كل من المستويين (P_1)، (P_2)

إذن: تقاطع المستويين (P_1)، (P_2) هو المستقيم (AB).

3) تعيين إحداثيات النقطتين C ، D.

نفرض: (x,y,z) إحداثيات النقطة C.

بما أن: النقطة C تنتمي إلى المحور $(O;J)$ فإن: $x=z=0$

وبما أن: النقطة C تنتمي إلى المستوي (P_1) فإن: $2y+0-6=0$

أي: $y=3$ إذن: إحداثيات النقطة C هي: $(0,3,0)$

وبنفس الطريقة نجد إحداثيات النقطة D هي: $(0,-12,0)$

4) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P_3).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (P_3) إذا كان: $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AD}=0$

لدينا: $\overrightarrow{CM}(x,y-3,z)$ ، $\overrightarrow{AD}(-3,-12,-6)$

ومنه: المعادلة الديكارتية للمستوي (P_3) هي: $x+4y+2z-12=0$

5) كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (OA).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستقيم (OA) إذا وجد عدد حقيقي t

حيث: $\overrightarrow{OM}=t\,\overrightarrow{OA}$ ومنه: $\begin{cases}x=3t\\y=0\\z=6t\end{cases}$

تعيين إحداثيات النقطة E :

نفرض: (x , y , z) إحداثيات النقطة E فيكون:

$3t+4(0)+2(6t)-12=0$ ومنه: $t=0.8$

إذن: إحداثيات النقطة E هي: $(2.4 , 0 , 4.8)$.

6) تحديد علاقة النقطة E بالمثلث ACD.

الشعاعان $\vec{AE}$ ، $\vec{CD}$ متعامدان ومنه: E تنتمي إلى العمود المتعلق بالضلع $[CD]$ في المثلث ACD (1)

النقطتان C ، E تنتميان إلى المستوي (P_3) الذي شعاع ناظمه $\vec{AD}$

ومنه: الشعاعان $\vec{AD}$ ، $\vec{EC}$ متعامدان وبالتالي: E تنتمي إلى العمود المتعلق بالضلع $[AD]$ في المثلث ACD (2)

من (1) و (2) نستنتج أن: E هي نقطة تقاطع أعمدة المثلث ACD.

75: 1: حساب $\vec{AB}\cdot\vec{BC}$.

لدينا: $\vec{AB}(0,2,0)$ ، $\vec{BC}(0,0,-6)$ ومنه: $\vec{AB}\cdot\vec{BC}=0$

وبالتالي: $\vec{AB}$ ، $\vec{BC}$ متعامدان إذن: المثلث ABC قائم في B.

2: تبيين أن الشعاع $\vec{AD}$ ناظم للمستوي (ABC).

لدينا: $\vec{AD}(18,0,0)$ ومنه: $\vec{AD}\cdot\vec{BC}=\vec{AD}\cdot\vec{AB}=0$

ومنه: $\vec{AD}$ عمودي على كل من الشعاعين $\vec{AB}$ ، $\vec{BC}$.

إذن: الشعاع $\vec{AD}$ ناظم للمستوي (ABC).

كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (ABC) إذا كان: $\vec{AM}\cdot\vec{AD}=0$ أي: $x-1=0$.

إذن: المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $x-1=0$.

3: تبيين أن $\vec{CE}$ ، $\vec{AB}$ غير مرتبطين خطيا.

لدينا: $\vec{CE}(18,0,6)$ ، $\vec{AB}(0,2,0)$

بما أن: $(2)(6)\neq(0)(0)$ فإن: $\vec{CE}$ ، $\vec{AB}$ غير مرتبطين خطيا.

وهذا يعني أن: النقطة E لا تنتمي إلى المستوي (ABC).

4: تعيين إحداثيات النقطة G.

حسب نتيجة السؤال الأول لدينا $\vec{AB}$ ، $\vec{BC}$ متعامدان وبالتالي:

يكون الرباعي $ABCG$ مستطيلا إذا كان: $\vec{AG}=\vec{BC}$

نفرض (x,y,z) إحداثيات G فنجد:

$$\begin{cases}x-1=0\\ y+1=0\\ z-3=-6\end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases}x=1\\ y=-1\\ z=-3\end{cases}$$

إذن: إحداثيات النقطة G هي: $(1,-1,-3)$.

5: التحقق أن النقاط D ، E ، F ليست في استقامية.

لدينا: $\vec{DE}(0,2,0)$ ، $\vec{DF}(0,2,-6)$

بما أن: $(2)(-6)\neq(0)(2)$ فإن: $\vec{DE}$ ، $\vec{DF}$ غير مرتبطين خطياً

وهذا يعني أن: النقاط D ، E ، F ليست في استقامية.

6: دراسة الوضع النسبي للمستويين (ABC) ، (DEF).

لدينا: $\vec{AD}\cdot\vec{DE}=0$ و $\vec{AD}\cdot\vec{DF}=0$

ومنه: الشعاع $\vec{AD}$ عمودي على كل من الشعاعين $\vec{DE}$ ، $\vec{DF}$.

ومنه: الشعاع $\vec{AD}$ ناظم للمستوي (DEF) (1)

حسب نتيجة السؤال الثاني لدينا:

الشعاع $\vec{AD}$ ناظم للمستوي (ABC) (2)

من (1) و (2) نستنتج أن: المستويين (ABC) ، (DEF) متوازيان ومختلفان أو منطبقان.

حسب نتيجة السؤال الثالث النقطة E لا تنتمي إلى المستوي (ABC) وتنتمي إلى المستوي (DEF).

إذن: المستويان (ABC)، (DEF) متوازيان ومختلفان.

7: أ) حساب الأطوال a، b، c.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(0,2,0)$ ، $\overrightarrow{BC}(0,0,-6)$ ، $\overrightarrow{AD}(18,0,0)$

ومنه: $AB = 2$ ، $BC = 6$ ، $AD = 18$

وبالتالي: $(a, b, c) = (2, 6, 18)$

ب) تبيين أن المتتالية (a, b, c) هندسية

بما أن: $b^2 = 36 = ac$ فإن: المتتالية $(a, b, c) = (2, 6, 18)$ هندسية أساسها: $q = \frac{b}{a} = 3$.

76: 1: تبيين أن النقاط A، B، C تعين مستوياً.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-1,-1,1)$ ، $\overrightarrow{AC}(-2,-5,-1)$

بما أن: $(-1)(-5) \neq (-1)(-2)$ فإن: $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

معناه: النقاط A، B، C ليست على استقامة واحدة.

إذن: النقاط A، B، C تعين مستويا.

2: إيجاد إحداثيات النقطة G.

بما أن: G مركز ثقل المثلث ABC فإن: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

أي: $3\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

معناه: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ ومنه:

$x_G = \frac{1+0-1}{3} = 0$ ، $y_G = \frac{2+1-3}{3} = 0$ ، $z_G = \frac{3+4+2}{3} = 3$

إذن: إحداثيات النقطة G هي: $(0, 0, 3)$

3: أ) التحقق أن $\vec{u}(2,-1,1)$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$.

بما أن: $\overrightarrow{AB}.\vec{u} = 0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{u} = 0$.

فإن: الشعاع $\vec{u}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$.

ب) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

حسب نتيجة السؤال الثالث فرع (أ) فإن: $\vec{u}$ ناظم للمستوي (ABC).

تكون نقطة $M(x, y, z)$ من المستوي (ABC) إذا كان: $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$

أي: $2x - y + z - 3 = 0$.

4: تبيين أن (Δ) عمودي على المستوي (ABC).

لدينا: $\vec{v}(-2,1,-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

$\vec{u}(2,-1,1)$ شعاع ناظم للمستوي (ABC).

واضح أن: $\vec{u} = -\vec{v}$ ومنه: $\vec{u}$، $\vec{v}$ مرتبطان خطيا.

وهذا يعني أن: المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC).

5: إثبات أن G هي المسقط العمودي للنقطة D على (ABC).

بما أن: إحداثيات النقطة G تحقق معادلة المستوي (ABC)

فإن: G تنتمي إلى المستوي (ABC) (1)

لدينا: $\overrightarrow{DG}(-4,2,-2)$ ، $\vec{u}(2,-1,1)$ ومنه: $\overrightarrow{DG} = -2\vec{u}$

معناه: $\vec{u}$ و $\overrightarrow{DG}$ مرتبطان خطياً (2)

من (1) و (2) نستنتج أن:

G هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

77: 1) كتابة معادلة لسطح الكرة (S)

تكون نقطة $M(x, y, z)$ من سطح الكرة (S) إذا كان: $BM^2 = AB^2$

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-12,6,0)$ ، $\overrightarrow{BM}(x+6, y, z-6)$

ومنه: معادلة سطح الكرة (S) هي: $(x+6)^2 + y^2 + (z-6)^2 = 180$

2) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P).

بما أن: المستوي (P) مماس لسطح الكرة (S) في النقطة A.

فإن: المستوي (P) هو مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء

حيث: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$

أي: $-12(x-6)+6(y+6)+(0)(z-6)=0$

معناه: $-2x+y+18=0$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $-2x+y+18=0$.

3) تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

بما أن: المستقيم (Δ) يعامد المستوي (P).

فإن: شعاع ناظم (P) هو شعاع توجيه (Δ) أي: الشعاع $\vec{u}(-2,1,0)$

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستقيم (Δ) إذا وجد عدد حقيقي t

حيث: $\overrightarrow{CM}=t\vec{u}$

معناه: $\begin{cases} x+2=-2t \\ y+2=t \\ z-11=0 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x=-2-2t \\ y=-2+t \\ z=11 \end{cases}$

4) تحديد إحداثيات النقطة D.

بما أن: النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) فإن:

إحداثياتها هي $(-2-2t,-2+t,11)$.

وبما أن: النقطة D تنتمي إلى المستوي (P).

فإن: إحداثياتها تحقق المعادلة: $-2x+y+18=0$

أي: $-2(-2-2t)+(-2+t)+18=0$

معناه: $5t+20=0$ ومنه: $t=-4$.

إذن: إحداثيات النقطة D هي: $(6,-6,11)$.

5) دراسة الوضع النسبي للمستقيمين (AD) ، (BC).

لدينا: $\overrightarrow{AD}(0,0,5)$ ، $\overrightarrow{BC}(4,-2,5)$

ومنه: الشعاعان $\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{BC}$ غير مرتبطين خطياً.

وهذا يعني أن: (AD)،(BC) متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي.

- التمثيلان الوسيطيان لكل من المستقيمين (AD)،(BC) هما على التوالي: $\begin{cases} x=6 \\ y=-6 \\ z=6+5t \end{cases}$ ، $\begin{cases} x=-6+4k \\ y=-2k \\ z=6+5k \end{cases}$

حيث: t، k عددان حقيقيان.

الجملة: $\begin{cases} -2k=-6 \\ 6+5k=6+5t \end{cases}$ تقبل حلا واحدا هو: $(t,k)=(3,3)$

من أجل: $t=k=3$ نجد: $(x,y,z)=(6,-6,21)$

إذن: المستقيمان (AD)،(BC) متقاطعان في النقطة $E(6,-6,21)$.

78: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2008 شعبة الرياضيات.

1: تبيين أن: (Δ)،(Δ') لا ينتميان إلى نفس المستوي.

شعاع توجيه (Δ) هو $\vec{u}(1, 0.5, -2)$

وشعاع توجيه (Δ') هو $\vec{v}(1,-2,1)$

بما أن: $(1)(-2)\neq(0.5)(1)$

فإن: الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً.

وهذا يعني أن: (Δ)،(Δ') متقاطعان أو لا ينتميان إلى نفس المستوي.

الجملة: $\begin{cases} 3+\lambda=6+\alpha \\ 2+0.5\lambda=1-2\alpha \end{cases}$ تقبل حلاً واحدا: $(\lambda, \alpha)=(2, -1)$

من أجل: $\lambda=2$ نجد: $(x,y,z)=(5,3,-6)$

من أجل: $\alpha=-1$ نجد: $(x,y,z)=(5,3,4)$

بما أن: $(5,3,4)\neq(5,3,-6)$

فإن: المستقيمين (Δ)،(Δ') لا ينتميان إلى نفس المستوي.

2: أ) تعيين إحداثيات M ، N.

بما أن: النقطتين M ، N من المستقيمين (Δ)، (Δ') على الترتيب.

فإن: $M(3+\lambda, 2+0.5\lambda, -2-2\lambda)$ ، $N(6+\alpha, 1-2\alpha, 5+\alpha)$

ومنه: $\overrightarrow{MN}(\alpha-\lambda+3\ ,\ -2\alpha-0.5\lambda-1\ ,\ \alpha+2\lambda+7)$

بما أن: المستقيم (MN) يعامد كل من (Δ)، (Δ') فإن:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\vec{u}=0 \\ \overrightarrow{MN}.\vec{v}=0 \end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases} 8\alpha+21\lambda+46=0 \\ 3\alpha+\lambda+6=0 \end{cases}$$

ومنه: $(\lambda\ ,\ \alpha)=\left(-\frac{18}{11}, -\frac{16}{11}\right)$

ومنه: نستنتج أن: $M\left(\frac{15}{11}, \frac{13}{11}, \frac{14}{11}\right)$ ، $N\left(\frac{50}{11}, \frac{43}{11}, \frac{39}{11}\right)$

ب) حساب الطول MN.

لدينا: $\overrightarrow{MN}\left(\frac{35}{11}, \frac{30}{11}, \frac{25}{11}\right)$ ومنه: $MN=\frac{5\sqrt{110}}{11}$

3: تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (P).

نفرض: $\vec{n}(a\ ,\ b\ ,\ c)$ شعاع ناظم للمستوي (P) فيكون:

$$\begin{cases} \vec{n}.\vec{u}=0 \\ \vec{n}.\vec{v}=0 \end{cases} \quad \text{أي:} \quad \begin{cases} a+0.5b-2c=0 \\ a-2b+c=0 \end{cases}$$

نضع: $b=6$ ثم نطرح طرفي المعادلتين فنجد: $c=5$ وبالتالي: $a=7$.

إذن: الشعاع $\vec{n}(7\ ,\ 6\ ,\ 5)$ ناظم للمستوي (P).

النقطة $A(3\ ,\ 2\ ,\ -2)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ).

ومنه: المستوي (P) هو مجموعة النقط $M(x\ ,y\ ,z)$ حيث:

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

إذن: معادلة المستوي (P) هي: $7x+6y+5z-23=0$

4: حساب المسافة بين نقطة من (Δ') والمستوي (P).

لدينا: $N(6+\alpha, 1-2\alpha, 5+\alpha)$ نقطة كيفية من (Δ').

ومنه: بعد النقطة N عن المستوي (P) هو d حيث:

$$d=\frac{|7(6+\alpha)+6(1-2\alpha)+5(5+\alpha)-23|}{\sqrt{(7)^2+(6)^2+(5)^2}}=\frac{50}{\sqrt{110}}=\frac{5\sqrt{110}}{11}$$

نلاحظ أن: المسافة بين أي نقطة من (Δ') والمستوي (P) هي MN.

حيث: M ، N النقطتان المعرفتان في السؤال الثاني.

79: 1: تبيين أن المستويين (P_1)، (P_2) متعامدان

لدينا: شعاع ناظم المستوي (P_1) هو: $\overrightarrow{u_1}(2\ ,-1\ ,\ 2)$

شعاع ناظم المستوي (P_2) هو: $\overrightarrow{u_2}(2, 2\ ,\ -1)$

بما أن: $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}=0$ فإن: الشعاعين $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ متعامدان.

وهذا يعني أن: المستويين (P_1)، (P_2) متعامدان

2: حساب بعد النقطة A عن كل من (P_1)، (P_2).

نفرض: A_1 المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_1) فيكون:

$$AA_1=\frac{|2(1)-(2)+2(-1)-5|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(2)^2}}=\frac{7}{3}$$

نفرض: A_2 المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_2) فيكون:

$$AA_2=\frac{|2(1)+2(2)-(-1)-4|}{\sqrt{(2)^2+(2)^2+(-1)^2}}=\frac{3}{3}=1$$

3: أ) تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ).

المستقيم (Δ) معرف بجملة المعادلتين: $\begin{cases} 2x-y+2z-5=0 \\ 2x+2y-z-4=0 \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} 3y-3z+1=0 \\ 6x+3z-14=0 \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} x=\frac{7}{3}-\frac{1}{2}z \\ y=-\frac{1}{3}+z \end{cases}$

نضع $z=t$ فنجد: $\begin{cases} x=\frac{7}{3}-\frac{1}{2}t \\ y=-\frac{1}{3}+t \\ z=t \end{cases}$ وهي المعادلات الوسيطية للمستقيم (Δ).

ب) حساب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ).

نفرض: H المسقط العمودي للنقطة A_1 على المستقيم (Δ) فيكون:

الرباعي AA_1HA_2 مستطيل ومنه: $(AH)^2=(AA_1)^2+(A_1H)^2$

أي: $(AH)^2=(AA_1)^2+(AA_2)^2$

معناه: $(AH)^2=\left(\frac{7}{3}\right)^2+(1)^2=\frac{58}{9}$ ومنه: $AH=\frac{\sqrt{58}}{3}$

إذن: بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) هو: $\frac{\sqrt{58}}{3}$.

4: تعيين إحداثيات النقطة M.

بما أن: النقطة M تنتمي إلى المستقيم (Δ) فإن إحداثياتها هي:

$$\left(\tfrac{7}{3}-\tfrac{1}{2}t\,,\,-\tfrac{1}{3}+t\,,\,t\right)$$

ومنه: $AM^2=\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}t\right)^2+\left(-\frac{7}{3}+t\right)^2+(t+1)^2$

معناه: $AM^2=\frac{9}{4}t^2-4t+\frac{74}{9}$

نضع: $f(t)=\frac{9}{4}t^2-4t+\frac{74}{9}$ فيكون: $f'(t)=\frac{9}{2}t-4$

المعادلة: $f'(t)=0$ تكافئ: $\frac{9}{2}t-4=0$ ومنه: $t=\frac{8}{9}$.

تكون المسافة AM أصغر ما يمكن عندما يكون للدالة f قيمة حدية صغرى أي: عندما تكون $t=\frac{8}{9}$.

إذن: احداثيات النقطة H هي $\left(\frac{17}{9},\frac{5}{9},\frac{8}{9}\right)$.

استنتاج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ).

لدينا: $f\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{58}{9}$ ومنه: $AM^2=\frac{58}{9}$

إذن: بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) هو: $AM=\frac{\sqrt{58}}{3}$.

80: 1: تبيين أن الرباعي $ABCD$ مربع.

يكون الرباعي $ABCD$ مربعا إذا تعامد و تقايس وتناصف قطراه

القطعتان $[AC]$، $[BD]$ لهما نفس المنتصف O (1)

لدينا: $\overrightarrow{AC}(0,-4,0)$ ، $\overrightarrow{BD}(-4,0,0)$

ومنه: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$ معناه: (AC)، (BD) متعامدان (2)

لدينا أيضا: $AC=BD=4$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن: الرباعي $ABCD$ مربع.

2: تحديد معادلة للمستوي (P) دون حساب:

بما أن: النقاط A، B، C، D لها نفس الراقمة $z=0$.

فإن: معادلة المستوي (P) الذي يشمل A، B، C، D هي: $z=0$.

3: أ) التحقق أن $\vec{u}(5,5,2)$ ناظم للمستوي (ABS).

لدينا: $\vec{u}(5,5,2)$ ، $\overrightarrow{AB}(2,-2,0)$ ، $\overrightarrow{AS}(0,-2,5)$

ومنه: $\overrightarrow{AS}.\vec{u}=0$ و $\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0$

معناه: الشعاع $\vec{u}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AS}$ ، $\overrightarrow{AB}$.

إذن: الشعاع $\vec{u}$ ناظم للمستوي (ABS).

ب) كتابة معادلة للمستوي (ABS).

المستوي (ABS) هو مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث: $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

أي: $5(x)+5(y-2)+2(z)=0$ معناه: $5x+5y+2z-10=0$.

إذن: معادلة المستوي (ABS) هي: $5x+5y+2z-10=0$

4: التحقق أن معادلة (BCS) هي: $5x-5y+2z-10=0$

بما أن: إحداثيات النقاط B ، C ، S تحقق المعادلة: $5x-5y+2z-10=0$

فإن: معادلة المستوي (BCS) هي: $5x-5y+2z-10=0$

5: أ) كتابة معادلة للمستوي (P').

الشعاع $\vec{v}(5,-5,2)$ ناظم لكل من (BCS) و (P') لأنهما متوازيان.

ومنه: المستوي (P') هومجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق:

$\overrightarrow{EM}.\vec{v}=0$ أي: $5(x)-5(y-1)+2(z)=0$

معناه: $5x-5y+2z+5=0$

إذن: معادلة للمستوي (P') هي: $5x-5y+2z+5=0$

ب) تحديد نقاط تقاطع (P') مع كل من: (OI) ، (OJ) ، (OK).

- من أجل: $z=y=0$ نجد:

$5x-5(0)+2(0)+5=0$ أي: $x=-1$

إذن: إحداثيات نقطة تقاطع (P') و (OI) هي: $(-1,0,0)$

- من أجل: $x=z=0$ نجد:

$5(0)-5y-2(0)+5=0$ أي: $y=1$

إذن: إحداثيات نقطة تقاطع (P') و (OJ) هي: $(0,1,0)$

- من أجل: $x=y=0$ نجد:

$5(0)-5(0)+2z+5=0$ أي: $z=-2.5$

إذن: إحداثيات نقطة تقاطع (P') و (OK) هي: $(0,0,-2.5)$

81: 1) إثبات أن المجموعة (S_m) سطح كرة.

لدينا: $x^2+y^2+z^2-2mx+2my-4mz-1=0$

ومنه: $a=-2m$ ، $b=2m$ ، $c=-4m$ ، $d=-1$

لدينا: $\Delta=a^2+b^2+c^2-4d$ ومنه: $\Delta=24m^2+4>0$

إذن: المجموعة (S_m) سطح كرة مركزها هو: $\omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$

أي: $\omega(m,-m,2m)$ ونصف قطرها: $R=\frac{\sqrt{\Delta}}{2}=\sqrt{6m^2+1}$.

2) تبيين أن مجموعة النقط ω هي مستقيم:

نفرض: (x,y,z) إحداثيات النقطة ω فيكون: $\begin{cases} x=m \\ y=-m \\ z=2m \end{cases}$

بما أن: العدد m حقيقي فإن: مجموعة النقط ω هي مستقيم مركبات شعاع توجيهه $(1,-1,2)$

3) إثبات أن (S_m) تشمل دائرة ثابتة (C).

لدينا: $x^2+y^2+z^2-2mx+2my-4mz-1=0$

ومنه: $x^2+y^2+z^2-1-2m(x-y+2z)=0$

تتحقق هذه المعادلة من أجل جميع قيم m الحقيقية إذا كان:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0 & (1) \\ x-y+2z=0 & (2) \end{cases}$$

المعادلة (1) هي معادلة سطح الكرة (S_0) التي مركزها O وطول نصف قطرها r حيث: $r=1$ والمعادلة (2) هي معادلة مستو (P).

بما أن: المركز O ينتمي إلى المستوي (P) فإن:

المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S_0) في دائرة (C) مركزها O وطول نصف قطرها $r=1$ لأن: بعد مركز سطح الكرة (S_0) عن المستوي (P) أصغر تماما من طول نصف قطرها.

4) تحديد قيمة العدد m.

يكون المستوي (P) مماسا لسطح الكرة (S_m) إذا كان:

بعد المركز ω عن المستوي (P) يساوي $R=\sqrt{6m^2+1}$

أي: $\frac{|m-(-m)-(2m)+\sqrt{3}|}{\sqrt{3}}=\sqrt{6m^2+1}$ معناه: $1=\sqrt{6m^2+1}$

بتربيع الطرفين نجد: $1=6m^2+1$ ومنه: $m=0$

إذن: قيمة m حيث يكون (P) مماساً لسطح الكرة (S_m) هي 0.

82: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة العلوم التجريبية.

1: أ) تبيين أن المستوي (P) هو المستوي (ABC).

بما أن: احداثيات النقاط A ، B ، C تحقق المعادلة: $x-z+1=0$

فإن: المستوي (P) هو المستوي (ABC).

ب) تحديد طبيعة المثلث ABC.

لدينا: $AB^2=6$ ، $AC^2=3$ ، $BC^2=9$

بما أن: $BC^2=9=AC^2+AB^2$ فإن: المثلث ABC قائم في A.

2: أ) التحقق أن النقطة $D(2,3,4)$ لا تنتمي إلى (ABC).

لدينا: $2-4+1=-1\neq 0$ ومنه: النقطة D لا تنتمي إلى (ABC).

ب) تحديد طبيعة الرباعي $ABCD$.

بما أن: النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC).

فإن: الرباعي $ABCD$ رباعي وجوه.

3: أ) حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).

نفرض d المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) فيكون:

$$d=\frac{|2-4+1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ب) حساب حجم الرباعي $ABCD$.

نعلم أن: $V=\frac{1}{3}\times\frac{AB\times AC}{2}\times d$

ومنه: $V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$ نجد: $V=\frac{1}{2}uv$.

83: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة الرياضيات.

1: كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB).

تنتمي نقطة $M(x,y,z)$ إلى المستقيم (AB) إذا وجد عدد حقيقي α

حيث: $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}$.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-2,1,-3)$ ، $\overrightarrow{AM}(x-2,y-1,z-2)$

إذن: التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) هو: $\begin{cases}x=2-2\alpha\\ y=1+\alpha\\ z=2-3\alpha\end{cases}$

إثبات أن (D) ، (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

لدينا: $\vec{u}(3,-1,2)$ ، $\overrightarrow{AB}(-2,1,-3)$ حيث: $\vec{u}$ موجه (D).

بما أن: $(-2)(-1)\neq(1)(3)$

فإن: الشعاعين $\vec{u}$ ، $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطيا.

ومنه: المستقيمان (D) و (AB) غير متوازيين.

الجملة: $\begin{cases}2+3t=2-2\alpha\\ 1-t=1+\alpha\\ 2t=2-3\alpha\end{cases}$ لا تقبل حلولا.

ومنه: المستقيمان (D) و (AB) غير متقاطعين.

إذن: المستقيمان (D) و (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي

2: أ) تبيين أن الشعاع $\vec{n}(1,5,1)$ عمودي على المستوي (P).

لدينا: $\vec{n}.\vec{u}=(1)(3)+(5)(-1)+(1)(2)=0$

ومنه: $\vec{n}$ ، $\vec{u}$ متعامدان إذن: الشعاع $\vec{n}$ ناظم للمستوي (P).

ب) كتابة معادلة للمستوي (P).

المستوي (P) هو مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث: $\overline{AM}.\vec{n}=0$

ومنه معادلة المستوي (P) هي: $x+5y+z-9=0$.

ج) تبيين أن بعد نقطة M من (D) و (P) مستقلة عن موضع M.

لتكن: H المسقط العمودي للنقطة M على المستوي (P).

ومنه: $HM=\dfrac{|2+3t+5(1-t)+2t-9|}{\sqrt{1+25+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{27}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

د) تعيين التمثيل الوسيطي لمستقيم تقاطع المستويين (P)،(yoz).

معادلة المستوي (yoz) هي: $x=0$ ومنه: مستقيم التقاطع معرف بجملة المعادلتين:

$$\begin{cases}x=0\\x+5y+z-9=0\end{cases}$$ أي: $$\begin{cases}x=0\\y=t\\z=9-5t\end{cases}$$ مع: t عدد حقيقي.

84: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة الرياضيات.

1: كتابة معادلة للمستوي (P_2).

لدينا: $$\begin{cases}x=1+2\alpha+\beta\\y=1+\alpha\\z=5+\alpha+\beta\end{cases}$$ ومنه: $$\begin{cases}x-2y=-1+\beta\\y-z=-4-\beta\end{cases}$$

ومنه: $(x-2y)+(y-z)=-5$ نجد: $x-y-z+5=0$.

إذن: معادلة للمستوي (P_2) هي: $x-y-z+5=0$.

2: تعيين شعاع ناظم لكل من المستويين (P_1)،(P_2).

من المعادلتين الديكارتيتين للمستويين (P_1)،(P_2) نستنتج أن:

الشعاع $\vec{n_1}(1,2,-1)$ ناظم للمستوي (P_1)

والشعاع $\vec{n_2}(1,-1,-1)$ ناظم للمستوي (P_2).

3: تبين أن المستويين (P_1)،(P_2) متعامدان.

لدينا: $\vec{n_1}.\vec{n_2}=0$ ومنه: (P_1)،(P_2) متعامدان.

4: أ) حساب قيمة كل من d_1، d_2.

$$d_1=\frac{|3+2(1)-1-2|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$d_2=\frac{|3-1-1+5|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

ب) استنتاج المسافة d_3.

لدينا: $d_3^2=d_1^2+d_2^2$ ومنه: $d_3^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2=\frac{38}{3}$

ومنه: $d_3=\sqrt{\frac{38}{3}}=\frac{\sqrt{114}}{3}$.

5: أ) تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ).

لدينا: $$\begin{cases}x+2y-z-2=0\\x-y-z+5=0\end{cases}$$ ، نضع: $z=\lambda$ فنجد:

$$\begin{cases}x+2y-\lambda-2=0\\x-y-\lambda+5=0\\z=\lambda\end{cases}$$ أي: $$\begin{cases}x=-\frac{14}{3}+\lambda+2\\y=\frac{7}{3}\\z=\lambda\end{cases}$$

إذن: التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) هو:

$$\begin{cases}x=\frac{-8}{3}+\lambda\\y=\frac{7}{3}\\z=\lambda\end{cases}$$ حيث: $\lambda\in IR$.

ب) حساب AM^2 بدلالة λ.

لدينا: $AM^2=(x-3)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$

ومنه: $AM^2=\left(\frac{-8}{3}+\lambda-3\right)^2+\left(\frac{7}{3}-1\right)^2+(\lambda-1)^2$

بعد النشر والاختزال نجد: $AM^2=\frac{2}{9}\left(9\lambda^2-60\lambda+157\right)$

نضع: $f(\lambda)=\frac{2}{9}\left(9\lambda^2-60\lambda+157\right)$

الدالة f تقبل الاشتقاق على IR حيث: $f'(\lambda)=\frac{2}{9}(18\lambda-60)$

المعادلة: $f'(\lambda)=0$ تكافئ: $\frac{2}{9}(18\lambda-60)=0$

ومنه: $\lambda=\frac{10}{3}$ وبالتالي: $AM^2=f\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{38}{3}$

إذن: $AM=\sqrt{\frac{38}{3}}=d_3$.

85 1: تبيين أن مجموعة النقط M هي مستو.

لدينا: $AM^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2$

ومنه: $AM^2=x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+6$

لدينا أيضا: $BM^2=(x+1)^2+(y)^2+(z+2)^2$

ومنه: $BM^2=x^2+y^2+z^2+2x+4z+5$

نعوض عن AM^2 و BM^2 في المعادلة: $AM^2-BM^2=1$

فنجد: $2x+y+4z=0$

وهي معادلة مستو (P) شعاع ناظم له $\vec{n}(2,1,4)$

لدينا: $\vec{n}=-\overrightarrow{AB}$ ومنه: الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ ، $\vec{n}$ مرتبطان خطيا.

وهذا يعني أن: المستوي (P) يعامد المستقيم (AB).

2: برهان أن المجموعة (S) سطح كرة.

لدينا: $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$

ومنه: $\Delta=(-2)^2+(-2)^2+(-2)^2-4(-6)=36>0$

ومنه: (S) سطح كرة مركزها $\Omega(1,1,1)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{36}}{2}=3$

3: أ) تعيين احداثيات النقطة G.

لدينا: $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ومنه: $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

ومنه: احداثيات النقطة G هي: $(1,1,-2)$.

واضح أن: احداثيات النقطة G تحقق معادلة (S)

ومنه: النقطة G تنتمي إلى (S).

ب) كتابة معادلة للمستوي (Q).

تكون نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (Q) إذا كان: $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{G\Omega}=0$

لدينا: $\overrightarrow{GM}(x-1,y-1,z+2)$ ، $\overrightarrow{G\Omega}(0,0,3)$

ومنه: معادلة المستوي (Q) هي: $3(z+2)=0$ أي: $z=-2$.

86: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2008 شعبة العلوم التجريبية.

تعيين الأجوبة الصحيحة

1) بما أن: إحداثيات النقطة D لا تحقق المعادلة: $x-3z-4=0$

فإن: الإجابة الصحيحة هي (ب) أي: المستوي (P) هو (ABC)

2) بما أن: $\overrightarrow{n_2}$ مرتبط خطياً مع $\vec{u}(1,0,-3)$ ناظم المستوي (P)

فإن: الإجابة الصحيحة هي (ب) أي: $\overrightarrow{n_2}(-2,0,6)$ ناظم للمستوي (P)

3) بعد النقطة D عن المستوي (P) هو d حيث:

$$d=\frac{|3-3(1)-4|}{\sqrt{(1)^2+(0)^2+(-3)^2}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

إذن: الإجابة الصحيحة هي الإجابة (ج).

87: بكالوريا الجزائر دورة جوان 2009 شعبة التقني رياضيات.

تحديد الاقتراحات الصحيحة.

1: لدينا: $z=1+t$ ومنه: $2=1+t$ معناه: $t=1$

من أجل $t=1$ نجد: $x=y=1$.

ومنه: $A(1,1,2)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ).

بالمثل نبين أن C ، B لا تنتميان إلى المستقيم (Δ).

إذن: الإقتراح الصحيح هو (أ).

2: شعاع توجيه المستقيم (Δ) هو: $\vec{v}(2,-1,1)$

بما أن: $\vec{v}=-2\vec{u}$ فإن: الشعاع $\vec{u}$ موجه للمستقيم (Δ).

إذن: الإقتراح الصحيح هو (ب).

3: لدينا: $\vec{u}.\vec{v}=0$ حيث: $\vec{v}$ ناظم المستوي (P) و $\vec{u}$ موجه (Δ).

ومنه: $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ متعامدان.

المعادلة: $(2t-1)+3(-t+2)+(t+1)+1=0$ لا تقبل أي حل.

ومنه: (Δ) يوازي المستوي (P).

إذن: الإقتراح الصحيح هو (ج).

4: شعاع ناظم المستوي (Q_3) هو: $\vec{n}(1,-1,2)$

لدينا: $\vec{n}.\vec{v}=0$ ومنه: المستوي (Q_3) يعامد (P).

إذن: الإقتراح الصحيح هو (ج).

5: باستعمال المسافة بين نقطة ومستو نجد كل الاقتراحات صحيحة.

بما أن: $(1)(-5)\neq(-3)(-1)$

فإن: النقاط A ، B ، C ليست في استقامية.

إذن: الجملة (1) خاطئة.

2) احداثيات النقاط A ، B ، D تحقق المعادلة: $25x-6y-z-33=0$.

إذن: الجملة (2) صحيحة.

3) لدينا: $\overrightarrow{CD}(-2,-1,0)$ ، $\vec{n}(2,-1,2)$ حيث:

$\vec{n}$ شعاع ناظم للمستوي (π).

بما أن: $(2)(-1)\neq(-1)(-2)$

فإن: الشعاعين $\overrightarrow{CD}$ ، $\vec{n}$ غير مرتبطين خطيا.

إذن: الجملة (3) خاطئة.

4) لدينا: $\overrightarrow{BH}(0,3,-5)$ ، $\vec{n}(2,-1,2)$

بما أن: $(2)(3)\neq(-1)(0)$

فإن: الشعاعين $\overrightarrow{BH}$ ، $\vec{n}$ غير مرتبطين خطيا.

إذن: الجملة (4) خاطئة.

89: تحديد الأجوبة الصحيحة والأجوبة الخاطئة:

1) النقاط: B ، C ، D على استقامة واحدة.

لدينا: $\overrightarrow{BC}(3,-3,0)$ ، $\overrightarrow{BD}(1,-4,1)$

بما أن: $(3)(-4)\neq(-3)(1)$

فإن: $\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{BD}$ غير مرتبطين خطيا.

إذن: الجملة (1) خاطئة.

2) معادلة المستوي (ABC) هي: $2x+2y-z-11=0$

إحداثيات النقاط A ، B ، C تحقق المعادلة: $2x+2y-z-11=0$

2) معادلة المستوي (ABC) هي: $2x+2y-z-11=0$

إحداثيات النقاط A ، B ، C تحقق المعادلة: $2x+2y-z-11=0$

ومنه: الجملة (2) صحيحة.

3) النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)

لدينا: شعاع ناظم المستوي (ABC) هو: $\vec{u}(2,2,-1)$

بما أن: $\overrightarrow{DE}(2,2,1)$ ، $\vec{u}(2,2,-1)$ غير مرتبطين خطيا

وذلك لأن: $(2)(-1)\neq(1)(2)$

فإن: الجملة (3) خاطئة.

4) التمثيل الوسيطي للمستقيم (CD) هو: $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=1-t \end{cases}$

بما أن: إحداثيات النقطة C لا تحقق معادلات الجملة السابقة

فإن: الجملة (4) خاطئة.

5) النقطة E تنتمي إلى المستقيم (CD).

إحداثيات النقطة E لا تحقق معادلات المستقيم (CD)

ومنه: الجملة (5) خاطئة.

محتويات الكتاب

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة